TP noté du cours d'introduction au filtrage de Kalman et à la commande optimale

EIDD 2A GP

À rendre pour dimanche 23 avril 2023

Ce sujet comporte 3 pages. Il comporte trois parties. Créez un fichier Matlab pour chaque partie. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles, mais dépendent toutes deux de la première partie. Vous pouvez admettre tous les résultats donnés par l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Il est inutile de recopier des morceaux d'énoncés dans votre copie. La notation tiendra compte de la clarté des réponses. Toutes les réponses doivent être justifiées. Tous les documents sont autorisés. Vous devez rendre votre copie par mail sous forme d'un unique document pdf à l'adresse `olivier.herscovici@onera.fr` *pour le dimanche 23 avril 2023 au plus tard.*

1 Modélisation et discrétisation (3 points)

On considère un modèle simple d'oscillateur de raideur (éventuellement négative) variable, avec un frottement (éventuellement négatif) variable. On note $p(t)$ la position de la particule à tout instant t, et $v(t)$ sa vitesse à tout instant.

On rappelle que la vitesse est définie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = v(t). \tag{1}$$

Par ailleurs, l'évolution du système suit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -1.5 \times p(t) - 0.3 \times v(t). \tag{2}$$

Notons X_c le vecteur d'état du système, défini à tout instant t par

$$X_c(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1. Montrer que l'évolution de X_c obéit à une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_c(t) = A_c(t) X_c(t), \tag{4}$$

où $A_c(t)$ est une matrice dont on précisera la valeur des coefficients.

2. On choisit une discrétisation de type Euler explicite :

$$X_c(t) \mapsto X_n \tag{5}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_c(t) \mapsto (X_{n+1} - X_n)/\Delta t. \tag{6}$$

Montrer que cette discrétisation mène à un système discret de la forme

$$X_{n+1} = AX_n, \tag{7}$$

où on précisera la valeur de la matrice A en fonction de A_c et Δt. On pourra noter Id l'identité des matrices réelles de taille 2×2.

3. À partir de maintenant, on prendra $\Delta t = 0.1$. Ainsi, le système obéit à l'équation

$$X_{n+1} = AX_n. \tag{8}$$

On prendra pour la valeur de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.15 & 0.97 \end{pmatrix}.$$

On prendra pour condition initiale une vitesse maximale à la position d'équilibre :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Simuler l'évolution du système pour $T = 300$ pas de temps. Afficher sur un graphique l'évolution de la position p du système au cours du temps. Est-ce bien l'allure attendue d'un oscillateur harmonique amorti ?

2 Filtre de Kalman pour l'oscillateur harmonique avec ajout d'une force aléatoire (10 points)

1. À présent, on décide de simuler un oscillateur harmonique où s'ajoute une force aléatoire : $X_{n+1} = AX_n + \phi_n$, où ϕ_n est défini à tout instant par

$$\phi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

où b_n est un bruit blanc gaussien centré stationnaire d'écart-type $\sigma = 0.04$. La matrice de covariance de ϕ est donc

$$V_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Afficher sur un graphique l'évolution de la position p du système au cours du temps.

2. À présent, on ajoute un capteur de position : à tout instant, $y_{n+1} = C x_{n+1} + \psi_{n+1}$. Le bruit ψ est un bruit blanc gaussien de variance $V_\psi = 0.05$. La matrice C vaut $C = [1 \quad 0]$. (Attention, il s'agit bien d'une matrice ligne, de sorte que $CX = p$). On introduit l'estimateur

$$\hat{X}_{n+1} = A\hat{X}_n + K[y_{n+1} - CA\hat{X}_n] \tag{11}$$

On prend $\hat{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

et on met en place un filtre de Kalman, c'est à dire que K est donnée à chaque instant par

$$K_{n+1} = (AP_nA^T + V_\phi) \times C^T \times (CAP_nA^TC^T + CV_\phi C^T + V_\psi)^{-1} \tag{12}$$

où P suit l'équation de récurrence

$$P_{n+1} = (Id - K_{n+1}C)(AP_nA^T + V_\phi). \tag{13}$$

On initialisera P par $P_0 = Id$.

Afficher sur le même graphe l'évolution au cours du temps de p, de l'estimée $\hat{p}$ de p et de la mesure y. Quelle est l'estimation de p qui vous semble meilleure : y ou $\hat{p}$? Justifier soigneusement la réponse.

3. Quelles sont la valeur finale P_T et la valeur finale K_T, toujours pour $P_0 = Id$? (Aucun calcul n'est nécessaire, il suffit d'afficher la valeur calculée par Matlab/Octave.)
4. À présent, on prend $P_0 = 0 \times Id$, c'est à dire que l'on initialise le filtre de Kalman avec une covariance de l'erreur supposée nulle (ce qui est bien sûr faux). Notez la valeur finale P_T et la valeur finale K_T, pour $P_0 = 0 \times Id$. Comparez aux valeurs finales de P et K pour $P_0 = Id$ que vous avez notées à la question précédente. Commenter.
5. À présent, on prend $V_\psi = 0$ et $C = Id$. Calculer analytiquement la valeur de K à chaque instant. Afficher sur le même graphe l'évolution au cours du temps de p, de l'estimée $\hat{p}$ de p et de la mesure y. Commenter.

3 Stabilisation optimale de l'oscillateur harmonique (7 points)

Pour cette partie, il faut charger les fonctions de commande d'Octave en utilisant la commande `pkg load control`. On repart du modèle de fin de la partie 1, mais avec des valeurs différentes et un vecteur de commande u :

$$X_{n+1} = AX_n + Bu_n. \tag{14}$$

On prendra pour nouvelle valeur de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.01 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prendra pour la valeur de la matrice B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On garde pour condition initiale une vitesse maximale à la position d'équilibre :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Afficher l'évolution de la position p et de la vitesse v du système au cours du temps (en prenant u=0). Est-ce que le système est stable ?
2. On se propose de trouver la commande u qui permet de stabiliser le système d'une façon qui minimise le critère
$$J_\alpha = \alpha \times \sum_{n=0}^{\infty} X_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2, \tag{15}$$
où $\alpha = 1$. Tracez p et v pour la solution qui minimise J_α pour $\alpha = 1$. Est-ce que le système est stabilisé ?
3. Tracez p et v pour la solution qui minimise J_α pour $\alpha = 10^{-3}$ et $\alpha = 10^3$. Commentez.

FIN DU SUJET