# Introduction aux fonctions de croyance

The French Aerospace Lab ONERA/DTIS Palaiseau, France. Email: jean.dezert@onera.fr (Juin 2020)

#### I. Introduction

Les fonctions de croyance ont été introduites par Glenn Shafer en 1976 [1] faisant suite aux travaux originaux menés par Arthur Dempster en [2], [3] pour étendre l'inférence Bayésienne aux mesures de probabilité imprécises. Dans ce contexte, on considère un ensemble  $\Theta$  de n>1 éléments distincts  $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\}$  correspondant au cadre de discernement (Frame of discernement, ou FoD en anglais) du problème de fusion à traiter. Tous les éléments de  $\Theta$  sont mutuellement exclusifs et  $\Theta$  constitue un ensemble exhaustif d'éléments. Ceci correspond au modèle de Shafer du cadre de discernement [12]. L'ensemble des sous-ensembles de  $\Theta$  (incluant l'ensemble vide  $\emptyset$ , et  $\Theta$  lui-même) est appelé l'ensemble puissance (power set en anglais) de  $\Theta$ , et il est noté  $2^{\Theta}$  car sa cardinalité vaut exactement  $2^{|\Theta|}$ . Dans cette note nous rappelons les définitions de base des fonctions de croyance ainsi que les règles de fusion permettant de les combiner. Pour plus de détails et des exemples, nous renvoyons le lecteur aux références citées dans ce document.

### II. DÉFINITIONS DES FONCTIONS DE CROYANCE

Une fonction de masse de croyance (basic belief assignment, ou BBA en anglais) normale (ou classique) est une fonction  $m(\cdot): 2^{\Theta} \to [0,1]$  telle que [1]

$$\begin{cases}
 m(\emptyset) = 0 \\
 \sum_{A \in 2^{\Theta}} m(A) = 1
\end{cases}$$
(1)

La valeur m(A) quantifie la masse de croyance allouée exactement au sous-ensemble A de  $\Theta$ . Ce sous-ensemble  $A \in 2^{\Theta}$  est appelé un élément focal de  $m(\cdot)$  si et seulement si m(A) > 0. Le cœur d'une masse de croyance  $m(\cdot)$ , noté  $\mathcal{F}(m)$ , est l'ensemble de tous ses éléments focaux, ainsi  $\mathcal{F}(m) = \{X \in 2^{\Theta} | m(X) > 0\}$ . La cardinalité du cœur de  $m(\cdot)$  est juste notée  $\mathcal{F} \triangleq |\mathcal{F}(m)|$ . Bien sûr, l'ordre des éléments focaux appartenant  $\mathcal{F}(m)$  n'a aucune importance. Tous les éléments de  $\mathcal{F}(m)$  sont différents, et  $\mathcal{F}(m)$  possède au moins un élément focal et au plus  $2^{|\Theta|} - 1$  éléments car l'ensemble vide n'est pas un élément focal de  $m(\cdot)$  puisque par définition  $m(\emptyset) = 0$ . Une masse de croyance est dite dogmatique lorsque  $m(\Theta) = 0$ , sinon elle est dite non-dogmatique. Une masse de croyance est dite simple si elle possède au plus deux éléments focaux dont un est  $\Theta$ . Une cadre de discernement  $\Theta$  est dichotomique lorsqu'il ne possède que deux éléments, c-à -d.  $\Theta = \{A, \bar{A}\}$  avec  $A \neq \emptyset$  et  $A \neq \Theta$ . Une masse de croyance est dite dichotomique si elle est définie sur un cadre de discernement dichotomique. Si l'on autorise  $m(\emptyset) > 0$  alors cette BBA sera dite anormale.

À partir de la fonction de masse de croyance  $m(\cdot)$ , on définit deux autres fonctions de croyance qui sont en relation biunivoque (in one-to-one relationship en anglais) avec elle. Il s'agit de la fonction de crédibilité (belief function en anglais) et de la fonction de plausibilité (plausibility function en anglais) qui sont définies respectivement par

$$Bel(A) = \sum_{X \in 2^{\Theta} | X \subseteq A} m(X) \tag{2}$$

et

$$Pl(A) = \sum_{X \in 2^{\Theta} | A \cap X \neq \emptyset} m(X) = 1 - \text{Bel}(\bar{A}).$$
(3)

où  $\bar{A}$  représente le complément du sous-ensemble A dans  $\Theta$ .

Bel(A) et Pl(A) peuvent être interprétées comme les bornes inférieures et supérieures de la mesure de probabilité inconnue P(A). L'intervalle de croyance [Bel(A), Pl(A)] quantifie l'imprécision sur la valeur de P(A) et lorsque Pl(A) = Bel(A) la probabilité P(A) est dite précise et vaut P(A) = Bel(A) = Pl(A). La valeur U(A) = Pl(A) - Bel(A) définit le niveau d'imprécision de P(A), et par abus de langage on parle aussi du niveau d'incertitude de A. Lorsque tous les éléments focaux de la masse de croyance sont des singletons de  $2^{\Theta}$ , cette masse de croyance est appelée masse de croyance bayésienne (Bayesian BBA en anglais) et dans ce cas les fonctions de crédibilité et de plausibilité coïncident et sont homogènes à une mesure de probabilité  $P(\cdot)$  définie sur l'ensemble  $\Theta$ . Parmi toutes les fonctions de masse de croyance que l'on peut définir sur  $2^{\Theta}$ , il

existe une masse de croyance particulièrement simple qui permet de modéliser parfaitement l'ignorance totale. Il s'agit de la fonction de masse de croyance définie par  $m_v(\Theta) = 1$  et  $m_v(X) = 0$  pour  $X \in 2^{\Theta}$  et  $X \neq \Theta$ . Cette masse de croyance  $m_v(\cdot)$ très particulière caractérise une source d'information totalement ignorante et qui n'apporte en fait aucune information utile au traitement de l'information. C'est pourquoi  $m_v(\cdot)$  est appelée masse de croyance vide, car elle est vide de toute information utile et exploitable dans un processus de fusion.

#### III. RÈGLES DE COMBINAISON

Dans cette section nous rappelons les règles de fusion élaborées dans le cadre des fonctions de croyances permettant de combiner plusieurs sources d'évidences caractérisées chacune par une fonction de masse de croyance définie sur un même cadre de discernement commun  $\Theta$ . Si l'on dispose de S>1 sources d'informations indépendantes fournissant chacune une masse de croyance  $m_i(\cdot)$ ,  $i=1,2,\ldots,S$ , la règle intuitive la plus simple à mettre en œuvre reste certainement la règle de fusion basée sur le moyennage des masses de croyance disponibles (averaging rule en anglais) qui peut s'écrire pour tout  $X \subseteq \Theta$  comme

$$m_{1,2,\dots,S}^{Aver}(X) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} m_i(X)$$
 (4)

On peut également considérer sa variante qui est la règle de moyennage pondéré définie par

$$m_{1,2,\dots,S}^{Aver_w}(X) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} w_i m_i(X)$$
 (5)

où chaque masse de croyance est pondérée par un poids d'importance  $w_i \in [0,1]$  tel que  $\sum_{i=1}^{S} w_i = 1$ . Malheureusement cette règle de fusion par moyennage n'est pas considérée comme suffisamment intéressante en général dans la mesure où la (ou les) source(s) totalement ignorante(s) influe(nt) beaucoup sur le résultat de la fusion, ce qui logiquement ne devrait pas avoir lieu puisque la (ou les) sources(s) ignorante(s) n'apporte(nt) aucune information utile exploitable. Par ailleurs, cette règle ne gère pas explicitement l'aspect conflictuel des sources d'informations à combiner. Rappelons aussi que cette règle de fusion par moyennage n'est pas associative.

Afin de mieux gérer le conflict entre les sources d'informations des règles de fusion, basées en partie sur la règle conjonctive, ont été développées. Nous rappelons ici d'abord la règle de fusion conjonctive, puis la règle de fusion de Dempster-Shafer (DS rule) [1], et enfin les règles plus sophistiquées à redistribution proportionnelle du conflit (règles PCR5 et PCR6) [12], ainsi que leurs avantages et inconvénients.

### A. Règle de fusion conjonctive

Considérons  $S \ge 2$  sources d'évidences caractérisées chacune par leur masse de croyance  $m_i(\cdot)$   $(i = 1, \dots, S)$  définie sur  $2^{\Theta}$ . Leur fusion conjonctive est définie pour tout  $A \in 2^{\Theta}$  par

$$m_{1,2,...,S}^{\text{Conj}}(A) = \sum_{\substack{\mathbf{X}_j \in \mathcal{F}(m_1,...,m_S) \\ X_{j_1} \cap ... \cap X_{j_S} = A}} \pi_j(X_{j_1} \cap X_{j_2} \cap ... \cap X_{j_S}) = \sum_{\substack{\mathbf{X}_j \in \mathcal{F}(m_1,...,m_S) \\ X_{j_1} \cap ... \cap X_{j_S} = A}} \prod_{i=1}^S m_i(X_{j_i})$$
(6)

où  $\mathcal{F}(m_1,\ldots,m_S)$  est le produit cartésien  $\mathcal{F}(m_1) \times \ldots \times \mathcal{F}(m_S)$  des cœurs des masses de croyances,  $\mathbf{X}_i$  $(X_{j_1},X_{j_2},\ldots,X_{j_S})\in \mathcal{F}(m_1,\ldots,m_S)$  est le j-ième S-uplet d'éléments focaux de  $\mathcal{F}(m_1,\ldots,m_S)$ , et  $\pi_j(X_{j_1}\cap X_{j_2}\cap\ldots\cap X_{j_S})$   $\triangleq \prod_{i=1}^S m_i(X_{j_i})$  est le j-ième produit possible des masses des éléments focaux contenus dans  $\mathbf{X}_j$ . La masse conflictuelle issue des S>1 sources of evidence, notée  $m_{1,2,\ldots,S}^{\rm Conj}(\emptyset)$  est la somme des masses de tous les produits conflictuels pour lesquels  $X_{j_1} \cap ... \cap X_{j_S} = \emptyset$ , c.-à -d.

$$m_{1,2,\ldots,S}^{\text{Conj}}(\emptyset) = \sum_{\substack{\mathbf{X}_j \in \mathcal{F}(m_1,\ldots,m_S) \\ X_{j_1} \cap \ldots \cap X_{j_S} = \emptyset}} \pi_j(X_{j_1} \cap X_{j_2} \cap \ldots \cap X_{j_S}) = 1 - \sum_{A \in 2^{\Theta} \setminus \{\emptyset\}} m_{1,2,\ldots,S}^{\text{Conj}}(A)$$

$$(7)$$

Il faut noter que la masse de croyance  $m_{1,2,\dots,S}^{\text{Conj}}(.)$  donnée par la formule (6) n'est pas à proprement dite une véritable masse de croyance dans la mesure où elle ne vérifie pas la définition (1) de Shafer puisque, en général, nous aurons  $m_{1,2,\dots,S}^{\text{Conj}}(\emptyset)>0$ car les sources d'informations sont rarement en accord parfait sur les mêmes hypothèses (éléments de  $2^{\Theta}$ ). Symboliquement, on notera  $m_{1,2,\ldots,S}^{\text{Conj}} = \text{Conj}(m_1, m_2, \ldots, m_S)$  la fusion conjonctive des masses de croyances  $m_1, m_2, \ldots$ , et  $m_S$ .

Cette règle de fusion est commutative et associative, ce qui signifie que le résultat de la fusion sera le même si on combine toutes les sources ensemble par la formule (6), ou bien si on les combine séquentiellement dans n'importe quel ordre. Un point intéressant à souligner est que la masse de croyance vide est l'élément neutre pour cette règle de fusion, ainsi une source d'évidence totalement ignorante n'impactera pas le résultat obtenu avec cette règle de fusion.

**Exemple 1**: Considérons  $\Theta = \{A, B\}$  et simple deux masses de croyances définies par

$$m_1(A) = 0.2$$
  $m_1(B) = 0.3$   $m_1(A \cup B) = 0.5$   
 $m_2(A) = 0.3$   $m_2(B) = 0.1$   $m_2(A \cup B) = 0.6$ 

Nous avons donc

$$\mathcal{F}(m_1, m_2) = \mathcal{F}(m_1) \times \mathcal{F}(m_2) = \{A, B, A \cup B\} \times \{A, B, A \cup B\}$$
  
= \{(A, A), (A, B), (A, A \cup B), (B, A), (B, B), (B, A \cup B), (A \cup B, A), (A \cup B, B), (A \cup B, A \cup B)\}

et les 9 produits suivants à considérer pour appliquer la règle conjonctive sont alors

$$\pi_1(A, A) = m_1(A)m_2(A) = 0.06$$

$$\pi_2(A, B) = m_1(A)m_2(B) = 0.02$$

$$\pi_3(A, A \cup B) = m_1(A)m_2(A \cup B) = 0.12$$

$$\pi_4(B, A) = m_1(B)m_2(A) = 0.09$$

$$\pi_5(B, B) = m_1(B)m_2(B) = 0.03$$

$$\pi_6(B, A \cup B) = m_1(B)m_2(A \cup B) = 0.18$$

$$\pi_7(A \cup B, A) = m_1(A \cup B)m_2(A) = 0.15$$

$$\pi_8(A \cup B, B) = m_1(A \cup B)m_2(B) = 0.05$$

$$\pi_9(A \cup B, A \cup B) = m_1(A \cup B)m_2(A \cup B) = 0.30$$

Seuls les produits  $\pi_2(A,B) = 0.02$  et  $\pi_4(B,A) = 0.09$  sont des produits conflictuels, notés respectivement  $\pi_2(\emptyset)$  puisque  $A \cap B = \emptyset$ , et  $\pi_4(\emptyset)$  puisque  $B \cap A = \emptyset$ . Ainsi, en appliquant la formule (6), on obtient finalement

$$m_{1,2}^{\text{Conj}}(A) = \pi_1(A,A) + \pi_3(A,A \cup B) + \pi_7(A \cup B,A) = 0.06 + 0.12 + 0.15 = 0.33$$
 
$$m_{1,2}^{\text{Conj}}(B) = \pi_5(B,B) + \pi_6(B,A \cup B) + \pi_8(A \cup B,B) = 0.03 + 0.18 + 0.05 = 0.26$$
 
$$m_{1,2}^{\text{Conj}}(A \cup B) = \pi_9(A \cup B,A \cup B) = 0.30$$

et la masse totale conflictuelle obtenue par la formule (7) vaut

$$m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(\emptyset) = \pi_2(A,B) + \pi_4(B,A) = 0.02 + 0.09 = 0.11 = 1 - m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(A) - m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(B) - m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(A \cup B)$$

Sur cet exemple simple, la masse conflictuelle issue des deux sources vaut  $m_{1,2}^{\text{Conj}}(\emptyset) = 0.11$ . Cette valeur du conflit, relativement petite, nous indique que les deux sources d'informations ne sont pas en profond désaccord.

Les inconvénients majeurs de cette règle de fusion purement conjonctive sont les suivants:

- 1) elle ne fournit pas une masse de croyance normale, puisque le plus souvent on a  $m_{1,2,\dots,S}^{\text{Conj}}(\emptyset) > 0$ ; 2) elle ne gère pas à proprement dit le conflit entre les sources à combiner, car elle évalue uniquement le niveau du conflit total sans pour autant l'exploiter pour générer une masse de croyance normale;
- 3) l'élément  $\hat{\emptyset}$  est un élément absorbant pour l'intersection ensembliste, ce qui conduit rapidement à obtenir  $m_{1,2,\dots,S}^{\rm Conj}(\emptyset) \to 1$ dans un processus de fusion de plusieurs sources d'évidence.

## B. Règle de fusion de Dempster-Shafer

La règle de combination de Dempster-Shafer [1] (DS rule en anglais) n'est rien d'autre que la règle conjonctive normalisée. Elle est définie par  $m_{1,2,\dots,S}^{\mathrm{DS}}(\emptyset)=0$  et pour tout  $A\in 2^\Theta$  non vide par

$$m_{1,2,...,S}^{\text{DS}}(A) = \frac{m_{1,2,...,S}^{\text{Conj}}(A)}{1 - m_{1,2,...,S}^{\text{Conj}}(\emptyset)}$$
(8)

Cette règle est la règle historique la plus connue et encore aujourd'hui la plus souvent utilisée à tort pour combiner les fonctions de croyance car elle est relativement simple à mettre en œuvre. De plus, elle est commutative est associative et elle préserve la neutralité de la masse de croyance vide dans le processus de fusion. Malheureusement l'utilisation de cette règle n'est pas sans danger car elle induit des comportements inacceptables non seulement en cas de fort conflit entre les sources comme l'avait montré Zadeh [4], [5], mais pire encore elle peut aussi s'avérer défaillante même dans le cas où les sources sont en faible conflit car certaines sources d'évidence peuvent être totalement écartées à tort du processus de fusion de par la normalisation utilisée dans cette règle. À titre d'exemple simple [7], considérons  $\Theta = \{A, B, C\}$  et deux BBAs normales  $m_1(\cdot)$  et  $m_2(\cdot)$  telles que  $m_1(A) = a$ ,  $m_1(A \cup B) = 1 - a$  et  $m_2(A \cup B) = b_1$ ,  $m_2(A \cup B \cup C) = b_2$  et  $m_2(C) = 1 - b_1 - b_2$ . On peut vérifier que dans ce cas  $m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(A) = a(b_1 + b_2)$ ,  $m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(A \cup B) = (1-a)(b_1 + b_2)$  et  $m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(\emptyset) = 1 - b_1 - b_2$ , et que par conséquent on obtient  $m_{1,2}^{\mathrm{DS}}(A) = m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(A)/(1-m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(\emptyset)) = a = m_1(A)$  et  $m_{1,2}^{\mathrm{DS}}(A \cup B) = m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(A \cup B)/(1-m_{1,2}^{\mathrm{Conj}}(\emptyset)) = 1 - a = m_1(A \cup B)$ . Ainsi on voit que la fusion de Dempster-Shafer de ces deux BBAs conflictuelles produit un résultat identique à la seule source d'évidence  $m_1(\cdot)$  comme si la seconde source  $m_2(\cdot)$  correspondait à une source d'évidence vide alors qu'elle ne l'est pas. Dans cet exemple, le niveau de conflit choisi peut être aussi grand ou aussi faible que l'on veut et le résultat produit par la règle de Dempster-Shafer restera inchangé ce qui montre clairement le problème de comportement erroné (dictatorial) de cette règle de fusion, et bien sûr des décisions qui en découleraient. Nous n'entrerons pas plus en détail sur toutes les critiques publiées concernant cette règle et nous renvoyons le lecteur intéressé aux références [6], [8]-[11] pour un complément de discussion. Il faut toujours garder à l'esprit que l'usage de cette règle dans un système opérationnel peut conduire à des comportements désastreux si l'on n'y prend pas garde.

#### C. Règles de fusion PCR5 et PCR6

Pour pallier les problèmes des règles conjonctive et de Dempster-Shafer, Dezert et Smarandache ont proposé en [12] (Vol. 2) d'autres règles plus pertinentes, mais plus complexes, pour effectuer la combinaison des masses de croyance. Nous nous focaliserons sur la présentation rapide de ces règles alternatives utilisées pour une fusion avancée et innovante des fonctions de croyance, à savoir les règles de fusion à redistribution proportionnelle des conflits no 5 et no 6, connues sous les acronymes PCR5 [13] et PCR6 [15], [16], PCR étant l'acronyme anglais de Proportional Conflict Redistribution. Le développement de ces règles a été motivé par le besoin de mieux combiner les fonctions de croyance en évitant les comportements hasardeux et contre-intuitifs de la règle de Dempster-Shafer tout en préservant l'aspect conjonctif de l'opérateur de fusion qui reste un élément clé de la fusion d'informations. Ces nouvelles règles de fusion sont plus sophistiquées et donc plus complexes à mettre en œuvre que la règle de Dempster-Shafer. Elles s'appuient sur le principle général suivant:

- on applique d'abord la règle de fusion conjonctive (6);
- on calcule les masses des produits conflictuels  $\pi_j(X_{j_1} \cap X_{j_2} \cap \ldots \cap X_{j_S} = \emptyset)$ ; on redistribue les masses  $\pi_j(\emptyset)$  proportionnellement sur tous les éléments focaux  $X_{j_1}, \ldots, X_{j_S}$  qui sont impliqués dans ce conflit partiel  $X_{j_1} \cap X_{j_2} \cap \ldots \cap X_{j_S} = \emptyset$ .

La manière dont la redistribution proportionnelle des conflits partiels est effectuée induit deux règles principales que l'on va maintenant présenter, à savoir la règle PCR5 et la règle PCR6. Symboliquement, la fusion par PCR5 fusion et par PCR6 de  $S \geq 2$  BBAs sera notée respectivement par  $m_{1,2,\ldots,S}^{\text{PCR5}} = \text{PCR5}(m_1,m_2,\ldots,m_S)$ , et par  $m_{1,2,\ldots,S}^{\text{PCR6}} = \text{PCR6}(m_1,m_2,\ldots,m_S)$ .

1) Règle de fusion PCR5: La règle PCR5 transfert chaque masse conflictuelle  $\pi_i(\emptyset)$  vers les éléments focaux qui interviennent dans ce conflit partiel proportionnellement à chaque masse individuelle de ces éléments focaux. Ainsi une redistribution plus fine et plus précise que celle réalisée avec la règle de Dempster-Shafer est obtenue. La règles PCR5 est présentée en détails avec des exemples en [12], Vol. 2 et Vol. 3. La combinaison de deux BBAs par la règle PCR5 s'obtient1 par  $m_{1,2}^{\text{PCR5}}(\emptyset) = 0$ , et pour tout  $A \in 2^{\Theta}$  non vide par

$$m_{1,2}^{\text{PCR5}}(A) = m_{1,2}^{\text{Conj}}(A) + \sum_{\substack{X \in 2^{\Theta} \\ X \cap A = \emptyset}} \left[ \frac{m_1(A)^2 m_2(X)}{m_1(A) + m_2(X)} + \frac{m_2(A)^2 m_1(X)}{m_2(A) + m_1(X)} \right]$$
(9)

où  $m_{1,2}^{\text{Conj}}(A)$  est donné par (6) avec S=2, et où tous les dénominateurs intervenant dans (9) sont non nuls. Si un dénominateur est égal à zéro, alors cette fraction est écartée et n'intervient donc pas dans la formule. Toutes les propositions (sous-ensembles) sont exprimées sous leur forme canonique (c.-à -d. sous la forme normale disjonctive qui est la plus simple et qui est aussi unique dans l'algèbre Booléenne). Par exemple, si  $X = A \cap B \cap (A \cup B \cup C)$  alors on exprimera X sous la forme équivalente canonique  $X = A \cap B$ .

La formule (9) peut aussi s'exprimer en ne considérant que les éléments focaux des deux BBAs comme suit

$$m_{1,2}^{\text{PCR5}}(A) = m_{1,2}^{\text{Conj}}(A) + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, \mathcal{F}\} \mid \mathbf{X}_j \in \mathcal{F}(m_1, m_2) \\ X_{j_1} \cap X_{j_2} = \emptyset \\ A \in \mathbf{X}_j}} \left[ m_{i \in \{1, 2\} \mid X_{j_i} = A}(X_{j_i}) \cdot \frac{\pi_j(X_{j_1} \cap X_{j_2})}{m_1(X_{j_1}) + m_2(X_{j_2})} \right]$$
(10)

où  $\mathcal{F} = |\mathcal{F}(m_1)| \cdot |\mathcal{F}(m_2)|$  est le nombre total de produits  $\pi_j(X_{j_1} \cap X_{j_2}) = m_1(X_{j_1})m_2(X_{j_2})$ , et où  $A \in \mathbf{X}_j$  signifie qu'au moins une des composantes de  $X_i$  est égale à A.

Le généralisation de la formule (10) à  $\$ la fusion de S>2 BBAs est quasi-immédiate. Lorsqu'un élément  $A\in 2^\Theta$  n'intervient pas dans un produit conflictuel  $\pi_j(\emptyset)$ , c.-à -d. si  $A \notin \mathbf{X}_j$ , alors  $\pi_j(\emptyset)$  n'est pas redistribué vers A. Par contre, si  $A \in \mathbf{X}_j$  et si

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>La formule explicite de la règle PCR5 pour la combinaison de trois BBAs est donnée en [14].

 $\pi_j(X_{j_1} \cap \ldots \cap X_{j_S}) = \pi_j(\emptyset)$  (i.e. le produit  $\pi_j$  est un produit conflictuel), alors on effectue une redistribution proportionnelle  $x_i(A)$  du produit conflictuel  $\pi_i(\emptyset)$  vers A selon le principe

$$x_j(A) \triangleq \left(\prod_{i \in \{1, \dots, S\} \mid X_{j_i} = A} m_i(X_{j_i})\right) \cdot \frac{\pi_j(\emptyset)}{\sum_{X \in \mathbf{X}_j} \left(\prod_{i \in \{1, \dots, S\} \mid X_{j_i} = X} m_i(X_{j_i})\right)}$$
(11)

On obtient ainsi

$$m_{1,2,...,S}^{\text{PCR5}}(A) = m_{1,2,...,S}^{\text{Conj}}(A) + \sum_{j \in \{1,...,\mathcal{F}\} | A \in \mathbf{X}_j \land \pi_j(\emptyset)} x_j(A)$$
 (12)

où  $A \in \mathbf{X}_j \wedge \pi_j(\emptyset)$  est une notation condensée signifiant qu'au moins une des composantes du S-uplet  $\mathbf{X}_j$  est égale à A et que les composantes de  $X_j$  sont conflictuelles, c.-à -d.  $X_{j_1} \cap \ldots \cap X_{j_S} = \emptyset$ . Par conséquent, l'expression générale de la règle PCR5 vaut  $m_{1,2,\ldots,S}^{\text{PCR5}}(\emptyset) = 0$ , et pour tout  $A \in 2^{\Theta}$  non vide

$$m_{1,2,...,S}^{\text{PCR5}}(A) = m_{1,2,...,S}^{\text{Conj}}(A) + \sum_{j \in \{1,...,\mathcal{F}\} | A \in \mathbf{X}_j \land \pi_j(\emptyset)} \left[ \left( \prod_{i \in \{1,...,S\} | X_{j_i} = A} m_i(X_{j_i}) \right) \cdot \frac{\pi_j(\emptyset)}{\sum_{X \in \mathbf{X}_j} \left( \prod_{i \in \{1,...,S\} | X_{j_i} = X} m_i(X_{j_i}) \right)} \right]$$
(13)

Bien sûr la formule (13) coïncide avec la formule (10) pour S=2. Cette formule générale est aussi équivalente à la formule donnée en [13] mais elle n'utilise que les éléments focaux de chaque BBA ce qui lui confère une plus grande simplicité qui facilite son implémentation en Matlab<sup>TM</sup> par exemple.

2) Règle de fusion PCR6: Une variante de la règle PCR5 précédente, appelée règle PCR6, a été proposée par Martin et Osswald en [15], [16] juste après le développement de la règles PCR5 pour combiner S > 2 sources d'évidence. La différence entre PCR6 et PCR5 réside dans la manière dont la redistribution proportionnelle des conflits procède dès lors que plus de deux sources doivent être combinées ensemble et lorsque des éléments focaux ont une multiplicité dans un conflit partiel. Quand on n'a uniquement que deux BBAs à combiner les résultats de la règle PCR6 coïncident avec ceux de la règle PCR5. La formule explicite de la règle PCR6 pour la fusion de trois BBAs est donnée en [14]. L'expression générale de la règle PCR6 pour combiner  $S \geq 2$  BBAs s'écrit  $m_{1,2,\ldots,S}^{\text{PCR6}}(\emptyset) = 0$ , et et pour tout  $A \in 2^{\Theta}$  non vide comme

$$m_{1,2,...,S}^{\text{PCR6}}(A) = m_{1,2,...,S}^{\text{Conj}}(A) + \sum_{j \in \{1,...,\mathcal{F}\} | A \in \mathbf{X}_j \land \pi_j(\emptyset)} \left[ \left( \sum_{i \in \{1,...,S\} | X_{j_i} = A} m_i(X_{j_i}) \right) \cdot \frac{\pi_j(\emptyset)}{\sum\limits_{X \in \mathbf{X}_j} \left( \sum\limits_{i \in \{1,...,S\} | X_{j_i} = X} m_i(X_{j_i}) \right)} \right] (14)$$

Comme on l'observe en comparant les formules (13) et (14), on voit que la règle PCR5 utilise les produits  $\prod_{i \in \{1, \dots, S\} \mid X_{j_i} = A} m_i(X_{j_i}) \text{ lorsqu'on a des éléments focaux multiples } A \text{ dans le produit conflictuel } \pi_j(\emptyset), \text{ tandis que la règle produit son the produit conflictuel } \pi_j(\emptyset), \text{ tandis que la règle produit son the produit conflictuel } \pi_j(\emptyset), \text{ tandis que la règle produit son the produit conflictuel } \pi_j(\emptyset)$  $\begin{array}{c} \underset{i \in \{1,\dots,S\} \mid X_{j_i} = A}{\text{PCR6 utilise la somme}} \sum_{i \in \{1,\dots,S\} \mid X_{j_i} = A} m_i(X_{j_i}). \end{array}$ 

## D. Exemple d'application de PCR5 et PCR6

Exemple 2: Pour illustrer les règles PCR5 et PCR6, considérons un exemple très simple mais suffisamment intéressant pour mettre en évidence la différence des résultats produits par ces deux règles de fusion. On suppose que le cadre de discernement du problème vaut  $\Theta = \{A, B\}$ , et qu'on dispose des trois BBAs suivantes

$$m_1(A) = 0.6, m_1(B) = 0.1, m_1(A \cup B) = 0.3$$
  
 $m_2(A) = 0.5, m_2(B) = 0.3, m_2(A \cup B) = 0.2$   
 $m_3(A) = 0.4, m_3(B) = 0.1, m_3(A \cup B) = 0.5$ 

Puisque  $\mathcal{F}_1=|\mathcal{F}(m_1)|=3$ ,  $\mathcal{F}_2=|\mathcal{F}(m_2)|=3$  et  $\mathcal{F}_3=|\mathcal{F}(m_3)|=3$ , on aurae  $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2\cdot\mathcal{F}_3=27$  produits possibles d'éléments focaux à analyser. Il s'avère que 15 produits sont non conflictuels et interviendront directement dans le calcul de  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(A)$ ,  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(B)$  et de  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(A\cup B)$ . par ailleurs, 12 produits seront des produits conflictuels qui devront être redistribués proportionnellement vers les éléments focaux qui interviennent dans les conflits. En appliquant la règle conjonctive, nous obtenons  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(A)=0.5370$ ,  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(B)=0.0900$  et  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(A\cup B)=0.0300$ . La valeur du conflit

total vaut  $m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(\emptyset) = 1 - m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(A) - m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(B) - m_{1,2,3}^{\text{Conj}}(A \cup B) = 0.3430$ . Les 12 produits conflictuels à redistribuer sont les suivants:

$$\pi_1(\emptyset) = m_1(A)m_2(A)m_3(B) = 0.0300 \qquad \pi_7(\emptyset) = m_1(A \cup B)m_2(A)m_3(B) = 0.0150$$

$$\pi_2(\emptyset) = m_1(A)m_2(B)m_3(A) = 0.0720 \qquad \pi_8(\emptyset) = m_1(A \cup B)m_2(B)m_3(A) = 0.0360$$

$$\pi_3(\emptyset) = m_1(B)m_2(A)m_3(A) = 0.0200 \qquad \pi_9(\emptyset) = m_1(B)m_2(A)m_3(A \cup B) = 0.0250$$

$$\pi_4(\emptyset) = m_1(B)m_2(B)m_3(A) = 0.0120 \qquad \pi_{10}(\emptyset) = m_1(A)m_2(B)m_3(A \cup B) = 0.0900$$

$$\pi_5(\emptyset) = m_1(A)m_2(A)m_3(B) = 0.0180 \qquad \pi_{11}(\emptyset) = m_1(A)m_2(A \cup B)m_3(A) = 0.0080$$

$$\pi_{12}(\emptyset) = m_1(B)m_2(A \cup B)m_3(A) = 0.0080$$

En appliquant les formules de PCR5 (13), et de PCR6 (14) nous obtenons finalement  $m_{1,2,3}^{\text{PCR5}}(\emptyset) = 0$ ,  $m_{1,2,3}^{\text{PCR6}}(\emptyset) = 0$ , et

$$\begin{split} m_{1,2,3}^{\text{PCR5}}(A) &\approx 0.723281 & m_{1,2,3}^{\text{PCR6}}(A) \approx 0.743496 \\ m_{1,2,3}^{\text{PCR5}}(B) &\approx 0.182460 & m_{1,2,3}^{\text{PCR6}}(B) \approx 0.162245 \\ m_{1,2,3}^{\text{PCR5}}(A \cup B) &\approx 0.094259 & m_{1,2,3}^{\text{PCR6}}(A \cup B) \approx 0.094259 \end{split}$$

On observe une différence entre les BBAs  $m_{1,2,3}^{\text{PCR5}}$  and  $m_{1,2,3}^{\text{PCR6}}$  ce qui est tout à fait normal puisque les principes de redistribution diffèrent pour effectuer la redistribution vers les éléments focaux ayant une multiplicité. En utilisant la règle PCR5, le premier produit conflictuel  $\pi_1(\emptyset) = m_1(A)m_2(A)m_3(B) = 0.03$  sera redistribué vers A et B proportionnellement à  $m_1(A)m_2(A)$  et à  $m_3(B)$  selon

$$\frac{x_1(A)}{m_1(A)m_2(A)} = \frac{x_1(B)}{m_3(B)} = \frac{\pi_1(\emptyset)}{m_1(A)m_2(A) + m_3(B)}$$

ainsi on aura

$$x_1(A) = \frac{m_1(A)m_2(A)\pi_1(\emptyset)}{m_1(A)m_2(A) + m_3(B)} = 0.0225$$
 et  $x_1(B) = \frac{m_3(B)\pi_1(\emptyset)}{m_1(A)m_2(A) + m_3(B)} = 0.0075$ 

Notons que l'on a bien  $\pi_1(\emptyset) = x_1(A) + x_1(B) = 0.03$  avec PCR5.

Tandis qu'en utilisant la règle PCR6, le premier produit conflictuel  $\pi_1(\emptyset)=0.03$  sera redistribué vers A et B proportionnellement à  $(m_1(A)+m_2(A))$  et à  $m_3(B)$ . Ce qui produira les redistributions  $x_1(A)=0.0275$  pour A, et  $x_1(B)=0.0025$  pour B car

$$\frac{x_1(A)}{m_1(A) + m_2(A)} = \frac{x_1(B)}{m_3(B)} = \frac{\pi_1(\emptyset)}{m_1(A) + m_2(A) + m_3(B)}$$

Ainsi,

$$x_1(A) = \frac{(m_1(A) + m_2(A))\pi_1(\emptyset)}{m_1(A) + m_2(A) + m_3(B)} = 0.0275$$
 et  $x_1(B) = \frac{m_3(B)\pi_1(\emptyset)}{m_1(A) + m_2(A) + m_3(B)} = 0.0025$ 

Notons que l'on a bien aussi  $\pi_1(\emptyset) = x_1(A) + x_1(B) = 0.03$  avec PCR6.

Notons aussi que pour tous les produits conflictuels  $\pi_j(\emptyset)$  n'ayant aucun élément focal dupliqué, on procèdera à leur même redistribution avec la règle PCR5 et avec la règle PCR6. Par exemple, pour  $\pi_7(\emptyset) = m_1(A \cup B)m_2(A)m_3(B) = 0.0150$  nous aurons avec PCR5 et avec PCR6 la même redistribution suivante

$$\frac{x_7(A \cup B)}{m_1(A \cup B)} = \frac{x_7(A)}{m_2(A)} = \frac{x_7(B)}{m_3(B)} = \frac{\pi_7(\emptyset)}{m_1(A \cup B) + m_2(A) + m_3(B)}$$

Ainsi,  $\pi_7(\emptyset) = x_7(A \cup B) + x_7(A) + x_7(B) = 0.0150$  avec

$$x_7(A \cup B) = \frac{m_1(A \cup B)\pi_7(\emptyset)}{m_1(A \cup B) + m_2(A) + m_3(B)} = 0.0050$$

$$x_7(A) = \frac{m_2(A)\pi_7(\emptyset)}{m_1(A \cup B) + m_2(A) + m_3(B)} \approx 0.0083$$

$$x_7(B) = \frac{m_3(B)\pi_7(\emptyset)}{m_1(A \cup B) + m_2(A) + m_3(B)} \approx 0.0017$$

## E. Avantages et inconvénients des règles PCR5 et PCR6

L'avantage des règles PCR5 et PCR6 est qu'elles fonctionnent avec n'importe quel niveau de conflit entre les sources et que leur comportement n'engendre pas de résultats contre-intuitifs comme ceux mis en lumière avec la règle de Dempster-Shafer. Malheureusement ces règles ne sont pas associatives, ce qui implique que la fusion de S > 2 sources d'évidence doit être faite en une étape de fusion globale, et non séquentiellement sans quoi l'ordre de fusion séquentielle influera sur le résultat produit. Ceci est un handicap important de ces règles car il augmente considérablement la combinatoire intervenant dans les calculs. Par ailleurs ces nouvelles règles sont beaucoup plus complexes à mettre en œuvre et elles deviennent vite inexploitables dans le pire des cas (c.-à -d. lorsque les cœurs des BBAs coïncident avec  $2^{\Theta} \setminus \{\emptyset\}$ ) lorsque l'on a beaucoup de sources à combiner et lorsque la taille du cadre de discernement est grande. Des techniques sous-optimales pourraient être envisagées pour réduire la complexité du processus de fusion, soit en simplifiant les BBAs à combiner en réduisant leurs cœurs, soit en utilisant des décompositions canoniques [17], [18] par exemple. Des versions qualitatives de PCR5 et PCR6 ont été proposées en [12], Vol. 2 & 3, et en [16] pour gérer aussi directement des informations qualitatives (non numériques). Il est a noter que la masse d'information vide représentant la source totalement ignorante n'impacte pas le résultat de PCR5 ni de PCR6 tant que l'on a uniquement deux BBAs à combiner puisque dans ce cas particulier on n'a aucune masse conflictuelle à redistribuer. Par contre, la source ignorante peut impacter le résultat dans certains cas dès lors que l'on a au moins trois sources à combiner. Cet inconvénient est, selon nous, moins désastreux au niveau comportemental que l'utilisation de la normalisation faite dans la règle de fusion de Dempster-Shafer. En effet, le résultat produit par PCR6 (ou par PCR5) sera juste un peu moins précis en terme de masse allouée sur les singletons du cadre de discernement mais il n'apparaîtra pas comme fondamentalement aberrant, contrairement au résultat produit par la règle de Dempster-Shafer. Des recherches sont en cours pour améliorer les règles PCR5 et PCR6 afin de préserver la neutralité de la source ignorante et d'affiner le processus de redistribution des produits conflictuels. Nos recherches feront l'objet de futures publications. Du point de vue de leurs implémentations, la règle PCR6 est plus simple à programmer que la règle PCR5. Des codes Matlab<sup>TM</sup> basiques pour PCR5 et PCR6 ont déjà été publiés en [12], [19], et sont aussi disponibles dans des librairies de codes sur le web [20]. Du point de vue comportemental et d'aide à la décision, la règle PCR6 est considérée comme meilleure que la règle PCR5 [15], et on a également montré la compatibilité de la règle PCR6 avec l'estimation empirique des probabilités dans un jeu de pile ou face en [21]. L'exemple suivant justifie la recommandation du choix de PCR6 par rapport à celui de PCR5.

**Exemple 3**: considérons  $\Theta = \{A, B, C\}$ , et quatre BBAs dogmatiques définies par

$$m_1(A \cup B) = 1, m_2(B) = 1, m_3(A \cup B) = 1, \text{ and } m_4(C) = 1$$

Ces BBAs sont en conflit car  $(A \cup B) \cap B \cap (A \cup B) \cap C = \emptyset$ . De plus, ces BBAs sont en conflit total car  $\pi(\emptyset) = m_1(A \cup B)m_2(B)m_3(A \cup B)m_4(C) = 1$ . Si on applique la règle PCR5 pour cet exemple, on obtient les redistributions suivantes

$$\frac{x(A \cup B)}{m_1(A \cup B)m_3(A \cup B)} = \frac{x(B)}{m_2(B)} = \frac{x(C)}{m_4(C)} = \frac{\pi(\emptyset)}{m_1(A \cup B)m_3(A \cup B) + m_2(B) + m_4(C)}$$

et par conséquent  $x(A \cup B) = 1/3$ , x(B) = 1/3 and x(C) = 1/3, d'où

$$\begin{split} & m_{1,2,3,4}^{\text{PCR5}}(A \cup B) = x(A \cup B) = 1/3 \\ & m_{1,2,3,4}^{\text{PCR5}}(B) = x(B) = 1/3 \\ & m_{1,2,3,4}^{\text{PCR5}}(C) = x(C) = 1/3 \end{split}$$

Le résultat obtenu par PCR5 interroge car trois sources parmi les quatre excluent définitivement l'hypothèse C (puisque l'on a  $Pl_1(C) = Pl_2(C) = Pl_3(C) = 0$ ), donc intuitivement après la fusion des quatre BBAs on pressent bien que la masse allouée à C ne peut être supérieure à 1/4 = 0.25, ce qui n'est pas le cas avec la règle PCR5. Par contre, en appliquant la règle PCR6, on effectuera les redistributions suivantes

$$\frac{x(A \cup B)}{m_1(A \cup B) + m_3(A \cup B)} = \frac{x(B)}{m_2(B)} = \frac{x(C)}{m_4(C)} = \frac{\pi(\emptyset)}{m_1(A \cup B) + m_3(A \cup B) + m_2(B) + m_4(C)}$$

et par conséquent  $x(A \cup B) = 2/4$ , x(B) = 1/4 et x(C) = 1/4, d'où le résultat

$$\begin{split} m_{1,2,3,4}^{\text{PCR6}}(A \cup B) &= x(A \cup B) = 0.5 \\ m_{1,2,3,4}^{\text{PCR6}}(B) &= x(B) = 0.25 \\ m_{1,2,3,4}^{\text{PCR6}}(C) &= x(C) = 0.25 \end{split}$$

qui est plus conforme à ce qu'on espère intuitivement car on a bien  $m_{1,2,3,4}^{PCR6}(C) \le 1/4$ . Il est bon de rappeler que dans cet exemple la règle de Dempster-Shafer est mathématiquement inopérante puisque le conflit est total et ce faisant on aura une division par zéro dans la formule (8) de Dempster-Shafer.

#### IV. AFFAIBLISSEMENT DES SOURCES

La prise en compte de la fiabilité d'une source d'évidence est généralement faite à partir d'un facteur de fiabilité connu (ou estimé)  $\alpha \in [0,1]$  de la source concernée. Elle consiste à appliquer sur le jeu de masses  $m(\cdot)$  un affaiblissement de tous ses éléments focaux en les multipliant par le facteur  $\alpha$ , et en reportant la perte de masse  $(1-\alpha)$  sur l'ignorance totale. Cette technique a été proposée par Shafer en [1]. Du point de vue mathématique, cette opération d'affaiblissement de la fiabilité d'une source consiste en la modification de la masse de la manière suivante:

$$\begin{cases}
 m_{\alpha}(A) = \alpha \cdot m(A), \text{ pour } A \neq \Theta \\
 m_{\alpha}(\Theta) = \alpha \cdot m(\Theta) + (1 - \alpha)
\end{cases}$$
(15)

Ainsi lorsque la source est considérée comme totalement fiable, c.-à-d. quand  $\alpha=1$ , la masse "affaiblie"  $m_{\alpha}(\cdot)$  reste exactement la même que la masse originale  $m(\cdot)$ , et lorsque la source est considérée comme totalement non fiable (en prenant  $\alpha=0$ ) la masse  $m_{\alpha}(\cdot)$  sera exactement égale à la masse vide d'information  $m_v(\cdot)$  caractérisant une source totalement ignorante. Des techniques plus sophistiquées d'affaiblissement par fiabilité contextuelle existent aussi mais elles sont plus difficiles à mettre en œuvre [22], [23].

Dans un cadre multi-critères, chaque critère peut avoir une importance différente dans le processus de fusion qu'il faut pouvoir prendre en compte, mais peu de travaux existent sur le sujet dans le cadre des fonctions de croyance. En 2010 nous avons proposé une première méthode d'affaiblissement d'importance qui est en fait une méthode duale de la méthode de Shafer [19]. On considère alors un facteur d'importance connu (ou estimé)  $\beta \in [0,1]$  de la source concernée, et on effectue un affaiblissement de tous les éléments focaux du jeu de masses  $m(\cdot)$  en les multipliant par le facteur  $\beta$ , et en reportant la perte de masse  $(1-\beta)$  sur l'ensemble vide, ce qui correspond à l'opération mathématique suivante

$$\begin{cases}
 m_{\beta}(A) = \beta \cdot m(A), \text{ pour } A \neq \emptyset \\
 m_{\beta}(\emptyset) = \beta \cdot m(\emptyset) + (1 - \beta)
\end{cases}$$
(16)

On voit que si le facteur d'importance est maximal, i.e.  $\beta=1$ , la BBA "affaiblie"  $m_{\beta}(\cdot)$  reste identique à la BBA originale  $m(\cdot)$ , par contre lorsque la BBA n'a aucune importance ( $\beta=1$ ) la BBA affaiblie devient la BBA anormale  $m_0(\emptyset)=1$  qu'il est difficile d'interpréter. Ce type d'affaiblissement d'importance nous oblige alors à travailler avec des BBAs anormales puisque  $m_{\beta}(\emptyset)>0$  dans le processus de fusion, puis à effectuer une ultime étape de normalisation afin de produire un jeu de masse normal en sortie du processus de fusion.

Une deuxième méthode plus simple d'affaiblissement par importance consiste à simplement multiplier les éléments focaux du jeu de masses  $m(\cdot)$  par le facteur  $\beta$  sans pour autant transférer la perte de masse  $(1-\beta)$  sur un élément focal particulier, ce qui revient à travailler avec une masse affaiblie sous-normale définie simplement par  $m_{\beta}(A) = \beta \cdot m(A)$  et telle que  $\sum_{A \in 2^{\Theta}} m(A) = 1 - \beta$ . Là encore, avec cette 2ième méthode d'affaiblissement, une ultime étape de normalisation sera nécessaire afin de produire un jeu de masse normal en sortie du processus de fusion. Il est a noter que l'affaiblissement par importance (par la méthode 1 ou par la méthode 2) n'est pas opérante si on utilise la règle de fusion de Dempster-Shafer puisque les facteurs d'affaiblissements sont automatiquement éliminés au travers de la normalisation utilisée dans cette règle, cf Théorème 1 en [19]. Par contre ces méthodes d'affaiblissement par importances sont opérantes avec les règles de fusion PCR5 et PCR6. La méthode 1 étant plus compliquée à mettre en œuvre pour la gestion de l'ensemble vide dans les règles PCR5 et PCR6 [19], nous privilégions la méthode 2.

L'estimation du facteur d'affaiblissement  $\alpha \in [0,1]$  est généralement obtenue par une analyse statistique de la qualité des informations produites par la source d'évidence concernée. La détermination des facteurs d'importance  $\beta_i \in [0,1]$  de chaque source caractérisée par un jeu de masses  $m_i(\cdot)$  est plus difficile, puisque ces facteurs sont essentiellement de nature subjective et dépendent de la problématique à résoudre. Bien sûr, il n'est pas nécessaire de considérer des importances relatives d'une source par rapport aux autres et d'avoir obligatoirement  $\sum_{i=1}^{S} \beta_i = 1$ , comme on le ferait en utilisant la règle de fusion par moyennage pondéré donnée par la formule (5) en prenant  $w_i = \beta_i$ .

### V. AIDE À LA DÉCISION BASÉE SUR LES FONCTIONS DE CROYANCE

Nous rappelons ici brièvement les principales méthodes de recommandation de prise de décision à partir d'un jeu de masses de croyance (résultant généralement d'un processus de fusion d'informations) [24]. Les méthodes les plus simples se basent soit sur le maximum de crédibilité (attitude décisionnelle pessimiste) ou bien le maximum de plausibilité (attitude décisionnelle optimiste) qui correspondent à deux attitudes décisionnelles extrêmes. En d'autres termes,

- La décision basée sur le maximum de crédibilité consiste à choisir l'élément du cadre de discernement  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  le plus crédible. On décidera  $\hat{\theta} = \theta_{i^*}$  pour lequel

$$\theta_{i^{\star}} = \arg\max_{i} Bel(\theta_{i}) \tag{17}$$

- La décision basée sur le maximum de plausibilité consiste à choisir l'élément du cadre de discernement  $\Theta$  le plus plausible. On décidera  $\hat{\theta} = \theta_{i^*}$  pour lequel

$$\theta_{i^*} = \arg\max_{i} Pl(\theta_i) \tag{18}$$

Le choix d'une de ces deux attitudes décisionnelles extrêmes étant souvent très discutable, et on peut préférer choisir une attitude décisionnelle intermédiaire réalisant un compromis entre ces deux attitudes extrêmes. Pour ce faire, on approximera le jeu de masses de croyance  $m(\cdot)$  défini sur  $2^{\Theta}$  par un jeu de masses de probabilités  $P(\cdot)$  défini sur  $\Theta$  et compatible avec les intervalles de croyance  $[Bel(\cdot), Pl(\cdot)]$ , et l'on choisira l'élément de  $\Theta$  ayant la probabilité maximale. Ainsi, on décidera  $\hat{\theta} = \theta_{i^*}$  pour lequel

$$\theta_{i^{\star}} = \arg\max_{i} P(\theta_i) \tag{19}$$

En pratique il existe plusieurs méthodes de construction d'une mesure de probabilité  $P(\cdot)$  à partir d'un jeu de masses  $m(\cdot)$ . Les plus connues (et utilisées) étant la probabilité pignistique  $BetP(\cdot)$  de Smets [25], et la  $DSmP(\cdot)$  de Dezert et Smarandache [26]. Nous renvoyons le lecteur à [25] et [26] pour la présentation détaillée de ces transformations probabilistes de BBAs, et de leurs exemples.

La principale critique de l'utilisation d'une mesure de probabilité approximante d'un jeu de masses de croyance pour la prise de décision dans l'incertain est que la décision est prise à partir d'une information incomplète par construction même de la mesure de probabilité  $P(\cdot)$  choisie. En effet, les mesures de probabilités pignistique  $BetP(\cdot)$  et  $DSmP(\cdot)$  ne caractérisent pas complètement l'information contenue dans  $m(\cdot)$  puisqu'il n'existe pas de relation bi-univoque entre  $BetP(\cdot)$  et  $m(\cdot)$ , ni entre  $DSmP(\cdot)$  et  $m(\cdot)$ . En d'autres termes deux jeux de masses différents peuvent conduire aux mêmes jeux de probabilités  $BetP(\cdot)$ , ou  $DSmP(\cdot)$ , ce qui démontre une perte d'information entre le passage d'un jeu de masse non-bayésien à un jeu de probabilité approximant.

Afin de mieux justifier une prise de décision à partir d'un jeu de masse  $m(\cdot)$  tout en évitant de sacrifier une partie de l'information disponible dans la BBA il est beaucoup plus intéressant d'utiliser une métrique de distance entre deux BBAs. C'est pourquoi nous avons proposé en [27], [28] une vraie métrique de distance basée sur les intervalles de croyance définie par

$$d_{BI}(m_1, m_2) \triangleq \sqrt{N_c \cdot \sum_{X \in 2^{\Theta}} d_W^2(BI_1(X), BI_2(X))}$$
 (20)

où  $N_c=1/2^{n-1}$  est un facteur de normalisation assurant  $d_{BI}(m_1,m_2)\in [0,1]$ , et  $d_W(BI_1(X),BI_2(X))$  est la distance de Wassertein [29] entre deux intervalles de croyance  $BI_1(X)\triangleq [Bel_1(X),Pl_1(X)]=[a_1,b_1]$  et  $BI_2(X)\triangleq [Bel_2(X),Pl_2(X)]=[a_2,b_2]$  qui est définie par

$$d_W\left([a_1, b_1], [a_2, b_2]\right) \triangleq \sqrt{\left\lceil \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{a_2 + b_2}{2} \right\rceil^2 + \frac{1}{3} \left\lceil \frac{b_1 - a_1}{2} - \frac{b_2 - a_2}{2} \right\rceil^2}$$
(21)

En [27], nous avons prouvé que  $d_{BI}(m_1, m_2)$  était une vraie métrique de distance, et le choix de la distance de Wasserstein dans la définition  $d_{BI}$  est justifiée par le fait qu'on utilise des intervalles, plus précisément des intervalles de croyance  $[Bel_1(X), Pl_1(X)]$  et  $[Bel_2(X), Pl_2(X)]$ .

Pour simplifier les notations, on note  $m_X$  la masse catégorique ayant uniquement X pour élément focal, où  $X \neq \emptyset$  est un élément de  $2^{\Theta}$ . La BBA  $m_X$  est la masse définie comme  $m_X(X) = 1$  et  $m_X(Y) = 0$  pour tout  $Y \neq X$ . Cette masse catégorique joue un rôle important dans la méthode de prise de décision élaborée à partir de la distance  $d_{BI}$ . Pour ce jeu de masse catégorique on peut vérifier que l'on a toujours [Bel(X), Pl(X)] = [1,1] qui caractérise la certitude que l'on accorde à l'élément X. Ainsi nous pouvons établir une décision à partir de n'importe qu'elle BBA  $m(\cdot)$  en évaluant toutes les distances  $d_{BI}(m,m_X)$  entre  $m(\cdot)$  et  $m_X$  pour un ensemble de décision possibles  $\mathcal{D}=\{X\in 2^{\Theta}|X \text{ est admissible}\}$  choisi a priori. Généralement, on prendra  $\mathcal{D}=\Theta$  et toutes les décisions possibles admises correspondent alors aux éléments/singletons du cadre de discernement  $\Theta$ . La décision  $\hat{X}\in\mathcal{D}$  est obtenue par

$$\hat{X} = \arg\min_{X \in \mathcal{D}} d_{BI}(m, m_X) \tag{22}$$

où  $d_{BI}(m, m_X)$  est calculée par la formule (20).

Ce principe décisionnel est en fait très général puisqu'on peut étendre l'espace décisionnel  $\mathcal{D}$  à n'importe quel autre sousensemble de  $2^{\Theta}$  si on le souhaite. On peut aussi quantifier la qualité de la décision prise en calculant l'indicateur de qualité  $q(\hat{X}) \in [0,1]$  défini par [24]

$$q(\hat{X}) \triangleq 1 - \frac{d_{BI}(m, m_{\hat{X}})}{\sum_{X \in \mathcal{D}} d_{BI}(m, m_X)}$$
 (23)

On voit que cet indicateur de qualité sera maximum (et donc égal à 1) quand la distance entre  $m(\cdot)$  et  $m_{\hat{X}}$  vaut zéro ce qui signifie que la BBA  $m(\cdot)$  est justement focalisée sur  $\hat{X}$ . Plus  $q(\hat{X})$  est proche de 1, plus la décision produite  $\hat{X}$  est bonne. Contrairement aux méthodes décisionnelles précédentes, avec la méthode basée sur le minimum de  $d_{BI}$  on ne privilégie pas d'attitude décisionnelle a priori, et on exploite toute l'information disponible dans la BBA  $m(\cdot)$ . Théoriquement d'autres métriques de distance peuvent être utilisées, en particulier la distance plus connue de Jousselme [30]–[32], mais on a montré en [27] que la distance  $d_{BI}$  présentait un meilleur comportement que celle de Jousselme et qu'elle était aussi plus facile à calculer, et c'est pourquoi nous préférons utiliser cette métrique pour la prise de décision dans l'incertain à partir d'un jeu de masse de croyance.

Note: Il est à noter que dans le cas particulier d'arguments multiples atteignant la même valeur maximale de crédibilité, de plausibilité, de probabilité ou atteignant le même minimum de distance  $d_{BI}$ , on aura nécessairement une ambiguïté décisionnelle qu'on ne pourra lever que de manière ad-hoc, ou aléatoirement, ou bien qu'on laissera éventuellement en attente (si c'est possible) d'autres informations complémentaires délivrées par d'autres sources. Faute de mieux, on peut aussi adopter une décision plus douce en considérant comme décision possible la disjonction des éléments entrant dans l'ambiguïté décisionnelle quand elle a lieu.

#### REFERENCES

- [1] G. Shafer, A mathematical theory of evidence, Princeton University Press, 1976.
- [2] A. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, Ann. Math. Statist., Vol. 38, pp. 325–339, 1967.
- [3] A. Dempster, A generalization of Bayesian inference, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 30, pp. 205-245, 1968.
- [4] L.A. Zadeh, On the validity of Dempster's rule of combination of evidence, ERL Memo M79/24, Department of EECS, Univ. of California, Berkeley, U.S.A., 1979.
- [5] L.A. Zadeh, A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination, The Al Magazine, Vol.7, No. 2, pp. 85–90, 1986.
- [6] R. Yager, On the Dempster-Shafer framework and new combination rules, Information Sciences, Vol. 41, pp. 93–138, 1987.
- [7] J. Dezert, P. Wang, A. Tchamova, On The Validity of Dempster-Shafer Theory, in Proc. of Fusion 2012, Singapore, July 2012.
- [8] A. Tchamova, J. Dezert, On the Behavior of Dempster's Rule of Combination and the Foundations of Dempster-Shafer Theory, IEEE IS'2012, Sofia, Bulgaria, Sept. 6-8, 2012 (Best paper awards).
- [9] J. Dezert, A. Tchamova, D. Han, J.-M. Tacnet, Why Dempster's rule doesn't behave as Bayes rule with informative priors, Proc. of 2013 IEEE International Symposium on INnovations in Intelligent SysTems and Application (INISTA 2013), Albena, Bulgaria, June 19-21, 2013.
- [10] J. Dezert, A. Tchamova, D. Han, J.-M. Tacnet, Why Dempster's fusion rule is not a generalization of Bayes fusion rule, Proc. of Fusion 2013 Int. Conference on Information Fusion, Istanbul, Turkey, July 9-12, 2013.
- [11] J. Dezert, A. Tchamova, On the validity of Dempster's fusion rule and its interpretation as a generalization of Bayesian fusion rule, International Journal of Intelligent Systems, Special Issue: Advances in Intelligent Systems, Vol. 29, Issue 3, pages 223-252, March 2014.
- [12] F. Smarandache, J. Dezert (Editors), Advances and applications of DSmT for information fusion, American Research Press, Vols. 1–4, 2004–2015. https://www.onera.fr/fr/staff/jean-dezert/references
- [13] F. Smarandache, J. Dezert, Proportional conflict redistribution rules for information fusion, Chapter 1 of [12], Volume 2, 2006.
- [14] F. Smarandache, J. Dezert, Importance of sources using repeated fusion with the proportional conflict redistribution rules #5 and #6, in Multispace & Multistructure. Neutrosophic transdisciplinarity (100 collected papers of sciences), Vol. IV, North-European Scientific Publishers, Finland, 2010.
- [15] A. Martin, C. Osswald, A new generalization of the proportional conflict redistribution rule stable in terms of decision, Chapter 2 of [12], Volume 2, 2006
- [16] A. Martin, C. Osswald, J. Dezert, F. Smarandache, General combination rules for qualitative and quantitative beliefs, Journal of Advances in Information Fusion (JAIF), Vol. 3, No. 2, pp. 67–89, Dec. 2008.
- [17] J. Dezert, F. Smarandache, Canonical decomposition of dichotomous basic belief assignment, International Journal of Intelligent Systems, pp. 1–21, 2020.
- [18] J. Dezert, F. Smarandache, A. Tchamova, D. Han, Fast fusion of basic belief assignments defined on a dichotomous frame of discernment, in Proc. of Fusion 2020, Pretoria, South Africa, July 2020.
- [19] F. Smarandache, J. Dezert, J.-M. Tacnet, Fusion of sources of evidence with different importances and reliabilities, in Proc. of Fusion 2010, Edinburgh, Scotland, UK, 26-29 July 2010.
- [20] https://www.bfasociety.org/
- [21] F. Smarandache, J. Dezert, On the consistency of PCR6 with the averaging rule and its application to probability estimation, Proc. of Fusion 2013 Int. Conference on Information Fusion, Istanbul, Turkey, July 9-12, 2013.
- [22] D. Mercier, B. Quost, T. Denœux, Contextual discounting of belief functions, Proc. of ECQSARU2005, pp. 552-562, Barcelona, July 2005.
- [23] D. Mercier, T. Denœux, M.-H. Masson, Refined sensor tuning in the belief function framework using contextual discounting, Proc. of IPMU2006, Vol II, pp. 1443–1450, Paris, France, July 2006.
- [24] J. Dezert, D. Han, J.-M. Tacnet, S. Carladous, Y. Yang, Decision-Making with Belief Interval Distance, in Proc. of Belief 2016 Int. Conf., Prague, CZ, September 21-23, 2016.
- [25] P. Smets, R. Kennes, The transferable belief model, Artif. Int., Vol. 66, pp. 191-234, 1994.
- [26] J. Dezert, F. Smarandache, A new probabilistic transformation of belief mass assignment, Proc. of Fusion 2008, Cologne, Germany, Juillet 2008.
- [27] D. Han, J. Dezert, Y. Yang, New Distance Measures of Evidence based on Belief Intervals, Proc. of Belief 2014, Oxford, UK, 2014.
- [28] D. Han, J. Dezert, Y. Yang, Belief Interval Based Distance Measures in the Theory of Belief Functions, IEEE Trans. on SMC, Vol.48, No. 6, pp. 833–850. June 2018.
- [29] A. Irpino, R. Verde, Dynamic Clustering of Interval Data Using a Wasserstein-based Distance. Pattern Recognition Letters, Vol. 29, pp. 1648–1658, 2008.
- [30] A.-L. Jousselme, D. Grenier, É. Bossé, A new distance between two bodies of evidence. Information Fusion, Vol. 2, No. 2, pp. 91–101, 2001.
- [31] A.-L. Jousselme, P. Maupin, Distances in evidence theory: Comprehensive survey and generalizations, IJAR, Vol. 53, No. 2, pp. 118–145, 2012.
- [32] M. Bouchard, A.-L. Jousselme, P.-E. Doré, A proof for the positive definiteness of the Jaccard index matrix. IJAR, Vol. 54, pp. 615-626, 2013.