

# **Introduction au**

# **Pistage multi-cibles multi-senseurs**

Jean Dezert, Ph.D. 1990,

UConn Post Doc 1991

E-mail :jean.dezert@onera.fr

Septembre 2003



Je dédie ce cours à mes collègues et amis,

le Professeur Yaakov Bar-Shalom

et le Professeur Xiao-Rong Li



## **Avertissement**

Tous droits réservés. Toute reproduction et diffusion partielle ou complète de ce document, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, nécessite une autorisation écrite préalable de l'auteur.

Copyright ©1998-2003 by Jean Dezert



## About the author . . .

Jean Dezert was born in l’Hay les Roses, France in 1962. He received the electrical engineering degree from the Ecole Française de Radioélectricité Electronique et Informatique (EFREI), Paris in 1985, the D.E.A. degree in 1986 from University Paris VII (Jussieu) and his Ph.D. from University Paris XI , Orsay, in 1990, all in Automatic Control and Signal Processing. During 1986-1990 he was with the Systems Department at the French National Establishment for Aerospace Research (ONERA), Châtillon, France and did research in tracking. During 1991-1992, he visited the Department of Electrical and Systems Engineering, University of Connecticut, Storrs, as an European Space Agency (ESA) Postdoctoral Research Fellow. During 1992-1993 he was a teaching assistant in Electrical Engineering at the University of Orléans, France. Since 1993, he is senior staff research engineer in the Image Estimation and Decision (IED) research Lab of the Modeling and Information Processing Departement (DTIM) at ONERA. His current research interests include autonomous navigation, estimation theory, information fusion, stochastic systems theory and its applications to multisensor-multitarget tracking (MS-MTT). Dr. J. Dezert has one international patent in the autonomous navigation field and has published several papers in international conferences and journals. He coauthored one chapter of Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances, Vol. 2 (Y. Bar-Shalom Editor). He is member of IEEE and of Eta Kappa Nu, reviewer for International Journals, teaches a MS-MTT course at the French ENSTA Engineering School, collaborates for the development of the International Society of Information Fusion (ISIF) and has served as Local Arrangements Chair for the Third International Conference on Information Fusion, FUSION 2000 , July 10-13, in Paris and has been involved in the Program Committee of Fusion 2001, 2002 and 2003 International Conferences. Since 2001, he serves in the ISIF board as Secretary for the International Society of Information Fusion. He has recently developed with Prof. F. Smarandache from Dept. of Mathematics, Univ of New Mexico, Gallup, USA a new theory (the DS<sub>m</sub>T) of plausible and paradoxical reasoning for the fusion of uncertain and conflictual sources of information.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>xv</b>
<b>1 Estimation d'un système dynamique</b>	<b>1</b>
1.1 Représentation d'état d'un système dynamique . . . . .	1
1.2 Filtre de Kalman . . . . .	2
1.2.1 Equations du filtre de Kalman . . . . .	3
1.2.2 Equations du filtre de Kalman étendu d'ordre 1 . . . . .	3
1.2.3 Un cycle du filtre de Kalman standard . . . . .	5
1.2.4 Un cycle du filtre de Kalman étendu . . . . .	6
<b>2 Modèles cinématiques des cibles</b>	<b>7</b>
2.1 Modèles continus discrétisés . . . . .	7
2.1.1 Modèle à vitesse quasi-constante . . . . .	7
2.1.2 Modèle à accélération quasi-constante . . . . .	8
2.2 Modèles discrets . . . . .	10
2.2.1 Modèle cinématique discret à vitesse quasi-constante . . . . .	10
2.2.2 Modèle cinématique discret à accélération quasi-constante . . . . .	11
2.2.3 Modèle du virage coordonné . . . . .	12
2.3 Modèle de cible absente . . . . .	14
<b>3 Pistage mono-cible mono-senseur</b>	<b>15</b>
3.1 Validation des mesures . . . . .	15
3.1.1 Test de validation . . . . .	16
3.1.2 Probabilité de fenêtrage . . . . .	17

3.1.3	Volume de la fenêtre de validation . . . . .	17
3.1.4	Types de mesures utilisées . . . . .	18
3.2	Filtre NNSF (<1970) . . . . .	18
3.3	Filtre SNSF (<1970) . . . . .	18
3.4	Filtre PNNF (1971,1993) . . . . .	19
3.5	Filtre bayésien optimal (1974) . . . . .	22
3.5.1	Forme de l'estimateur optimal . . . . .	22
3.5.2	Expression des probabilités . . . . .	23
3.5.3	Inconvénient du FBO . . . . .	23
3.5.4	Algorithmes sous-optimaux . . . . .	23
3.6	Approche bayésienne du PDAF (1975) . . . . .	24
3.6.1	Forme de l'estimateur . . . . .	24
3.6.2	Expression des probabilités d'association . . . . .	25
3.6.3	Equations de prédiction . . . . .	27
3.6.4	Filtre PDAF enrichi par la reconnaissance . . . . .	27
3.6.5	Filtre PDAF modifié (1994) . . . . .	31
3.6.6	Avantages/inconvénients du PDAF . . . . .	32
3.6.7	Un cycle du PDAF . . . . .	33
3.7	Approche bayésienne de l'IPDAF (1985-1998) . . . . .	34
3.7.1	Perception de la cible et évènements d'association . . . . .	34
3.7.2	Forme de l'estimateur . . . . .	35
3.7.3	Equations de prédiction . . . . .	38
3.7.4	Calcul des probabilités d'association intégrées . . . . .	38
3.7.5	Remarques . . . . .	39
3.7.6	Calcul de $P_{k k-1,m_k}^O$ . . . . .	41
3.7.7	Commentaires sur le calcul des $\beta_i$ . . . . .	43
3.8	Filtre non-bayésien TSF (1975) . . . . .	45
3.8.1	Vraisemblance d'une séquence . . . . .	45
3.8.2	Test de confirmation/élimination de branches . . . . .	46
3.8.3	Avantages et inconvénients du TSF . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Pistage multi-cibles mono-senseur par approches bayésiennes</b>	<b>47</b>
4.1	Séparation et regroupement des cibles . . . . .	48
4.1.1	Exemple . . . . .	48
4.1.2	Matrice de validation utile . . . . .	49
4.1.3	Routine de <i>clustering</i> . . . . .	50
4.2	Pistage multi-cibles par JPDAF (1980) . . . . .	52
4.2.1	Hypothèses du JPDAF . . . . .	52
4.2.2	Principe général de la méthode . . . . .	53
4.2.3	Matrices d'associations faisables . . . . .	54
4.2.4	Indicateurs de détection, d'association et de FA . . . . .	55
4.2.5	Exemple . . . . .	55
4.2.6	Génération des matrices d'associations . . . . .	56
4.2.7	Expression des probabilités d'associations conjointes . . . . .	59
4.2.8	Version paramétrique du JPDAF . . . . .	61
4.2.9	Version non paramétrique du JPDAF . . . . .	62
4.2.10	Equations de mise à jour et de prédiction . . . . .	62
4.2.11	Version couplée du JPDAF . . . . .	62
4.2.12	En résumé . . . . .	64
4.3	Pistage multi-cibles par IJPDAF (1998) . . . . .	65
4.3.1	Hypothèses de l'IJPDAF . . . . .	66
4.3.2	Principe général de la méthode . . . . .	66
4.3.3	Exemple . . . . .	67
4.3.4	Expression théorique des probabilités $P\{\mathcal{E} \mathbf{Z}^k\}$ . . . . .	69
4.3.5	Version paramétrique de l'IJPDAF . . . . .	72
4.3.6	Version non paramétrique de l'IJPDAF . . . . .	72
4.3.7	Probabilités marginales d'associations intégrées . . . . .	72
4.3.8	Formulation concise des probabilités marginales d'associations . . . . .	73
4.3.9	Variantes possibles de l'IJPDAF . . . . .	74
4.4	Pistage multi-cibles par MHT (1977) . . . . .	74
4.4.1	Principe général du MHT . . . . .	74

4.4.2	Exemple . . . . .	75
4.4.3	Construction de l'arbre des associations . . . . .	79
4.4.4	Hypothèse d'associations conjointes courante . . . . .	79
4.4.5	Hypothèse d'associations conjointes cumulées . . . . .	81
4.4.6	Probabilité a posteriori d'associations conjointes cumulées . . . . .	81
4.4.7	Forme de l'estimateur . . . . .	82
4.4.8	En résumé . . . . .	83
4.4.9	Avantages du MHT . . . . .	83
4.4.10	Inconvénients du MHT . . . . .	83
4.5	Pistage multi-cibles par PMHT (1995) . . . . .	84
4.5.1	Formulation du problème . . . . .	84
4.5.2	Hypothèses du PMHT . . . . .	86
4.5.3	Présentation de l'algorithme EM . . . . .	88
4.5.4	Interprétation de l'algorithme EM . . . . .	90
4.5.5	Application de l'algorithme EM aux lois de mélange . . . . .	90
4.5.6	Cas particulier du mélange de gaussiennes . . . . .	93
4.5.7	Application de l'algorithme EM à l'EMP . . . . .	94
4.5.8	Application de l'algorithme EM pour le MAP : Algorithme PMHT	97
4.5.9	Cas particulier des processus linéaires markoviens gaussiens . . . . .	98
4.5.10	Résumé du principe général de la méthode EM pour l'EMP . . . . .	98
4.5.11	Résumé du PMHT . . . . .	99
4.5.12	Mise en garde . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Pistage multi-cibles mono-senseur par approches non bayésiennes</b>	<b>103</b>
5.1	Pistage multi-cibles par programmation entière 0-1 (1977) . . . . .	103
5.1.1	Formulation du problème . . . . .	103
5.1.2	Notion de partition faisable des mesures . . . . .	104
5.1.3	Critère pour la recherche de la meilleure partition . . . . .	105
5.1.4	Expression de la vraisemblance d'une séquence . . . . .	105
5.1.5	Équivalence du problème avec la programmation entière 0-1 . . . . .	106
5.1.6	Résolution du problème par programmation entière 0-1 . . . . .	107

5.1.7	En résumé . . . . .	109
5.1.8	Extension de la méthode au cas des détections manquantes . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Pistage multi-senseurs</b>	<b>111</b>
6.1	Modélisation des cibles au niveau des senseurs . . . . .	114
6.1.1	Cas de la modélisation avec modèles locaux identiques . . . . .	114
6.1.2	Cas de la modélisation avec modèles locaux réduits . . . . .	115
6.1.3	Remarques . . . . .	115
6.1.4	Notations . . . . .	116
6.2	Pistage par architectures centralisées et distribuées . . . . .	116
6.2.1	Filtre de Kalman avec fusion centralisée des mesures . . . . .	117
6.2.2	Filtre de Kalman avec fusion pseudo-séquentielle des mesures . . . . .	119
6.2.3	Présentation du filtre de Kalman avec architecture distribuée . . . . .	121
6.2.4	Filtre de Kalman distribué avec modélisation MLI . . . . .	122
6.2.5	Filtre de Kalman distribué avec modélisation MLR . . . . .	126
6.2.6	Filtre sous-optimal PDAF multi-senseurs . . . . .	128
6.2.7	Filtre PDAF distribué avec modélisation MLR . . . . .	128
6.2.8	Filtre PDAF distribué avec modélisation MLI . . . . .	134
6.2.9	Filtre JPDAF distribué avec modélisation MLR . . . . .	136
6.2.10	Filtre JPDAF distribué avec modélisation MLI . . . . .	143
6.3	Pistage multi-senseurs par fusion de pistes . . . . .	145
6.3.1	Présentation de la fusion de pistes . . . . .	145
6.3.2	Test de concordance entre pistes locales . . . . .	147
6.3.3	Cas simpliste des pistes locales indépendantes . . . . .	147
6.3.4	Cas réaliste des pistes locales dépendantes . . . . .	148
6.3.5	Principe de la fusion des pistes locales concordantes . . . . .	150
6.4	Pistage par fusion plots/pistes . . . . .	151
6.5	Association entre mesures issues de senseurs multiples . . . . .	151
6.5.1	Présentation . . . . .	151
6.5.2	Associations entre des mesures délivrées par 3 senseurs . . . . .	152
6.5.3	Extension au cas multi-senseurs . . . . .	169

6.6	Méthode de gestion des pistes . . . . .	173
6.6.1	Présentation . . . . .	173
6.6.2	Evaluation de la dégradation d'une piste . . . . .	174
6.6.3	Probabilité d'acceptation d'une fausse piste . . . . .	175
6.6.4	Détection et élimination des pistes fantômes . . . . .	176
6.6.5	Probabilité d'acceptation d'une piste fantôme . . . . .	178
6.6.6	Résumé de la méthode de gestion des pistes . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Pistage de cibles manœuvrantes</b>	<b>181</b>
7.1	Bref panorama des principales méthodes existantes . . . . .	181
7.2	Estimation hybride par modèles multiples . . . . .	182
7.2.1	Forme de l'estimateur optimal - Algorithme FHT . . . . .	182
7.2.2	Algorithmes MM sous-optimaux . . . . .	183
7.2.3	Chaînes de Markov discrètes . . . . .	184
7.2.4	Estimation par IMM à structure fixe de modèles (1984) . . . . .	185
7.2.5	Résumé d'un cycle complet de l'IMM standard . . . . .	194
7.2.6	Schéma de principe d'un cycle de l'IMM standard . . . . .	195
7.2.7	IMM/PDAF pour le pistage de cible manœuvrante dans du clutter	195
7.2.8	IMM/MSPDAF pour le pistage multi-senseurs de cible manœuvrante	196
<b>8</b>	<b>Aide aux simulations</b>	<b>201</b>
8.1	Test de consistance d'un filtre . . . . .	201
8.1.1	Dans les simulations . . . . .	201
8.1.2	Dans les applications réelles . . . . .	202
8.2	Initialisation des filtres pour les simulations . . . . .	202
8.2.1	Initialisation des filtres locaux . . . . .	203
8.2.2	Initialisation d'un filtre centralisé . . . . .	203
<b>9</b>	<b>Articles complémentaires (anglais)</b>	<b>205</b>
9.1	Sur la génération des fausses alarmes . . . . .	205
9.1.1	Introduction . . . . .	205
9.1.2	Preliminary . . . . .	206

9.1.3	Limitations of HF algorithm for simulations . . . . .	210
9.1.4	A new efficient algorithm . . . . .	213
9.1.5	Conclusion . . . . .	218
9.1.6	Matlab routines . . . . .	218
9.2	Interview of Professor Bar-Shalom . . . . .	220
9.2.1	Introduction . . . . .	220
9.2.2	About Your Name . . . . .	221
9.2.3	About Your Childhood and Your Family . . . . .	221
9.2.4	About Your PhD Study . . . . .	223
9.2.5	About Your Industry Years . . . . .	225
9.2.6	About Your Students and Your Research . . . . .	228
9.2.7	About Your Leisure . . . . .	230
9.2.8	About Your Retirement . . . . .	232
9.2.9	More Difficult Questions . . . . .	232



# Introduction

Ce cours a pour objectif de présenter les principaux algorithmes de pistage développés depuis une vingtaine d'années et les techniques de base de fusion multi-senseurs. On suppose ici le lecteur déjà familiarisé avec la théorie des probabilités [Kol50, Pap84], l'algèbre matricielle [Bel60, Ste71] et les bases de la théorie des systèmes et de l'estimation [Bro69, FH77, Lue79, Fav82]. Les ouvrages de base sur lesquels est fondé ce cours sont les suivants :

- C.A. Bozzo,"**Le Filtrage Optimal et ses Applications aux Problèmes de Poursuite**", (3 volumes),Diffusion Librairies Lavoisier, 11 Rue Lavoisier, Paris, 1983.
- Y. Bar-Shalom and T. Fortmann, "**Tracking and Data Association**", Academic Press, 1988.
- Y. Bar-Shalom and X.R. Li,"**Estimation and Tracking : Principles, Techniques, and Software**", Artech House,1993
- Y. Bar-Shalom and X.R. Li,"**Multitarget-Multisensor Tracking : Principles and Techniques**", YBS Publishing, Storrs, CT, 1995.

Tous les acronymes utilisés dans ce cours correspondent aux termes anglo-saxons pour familiariser le lecteur à la terminologie américaine du domaine.



# Chapitre 1

## Estimation d'un système dynamique

Ce chapitre présente brièvement le principe du filtrage de Kalman (**KF** - Kalman Filter) pour estimer l'état d'un système linéaire stochastique et le filtre de Kalman étendu (**EKF** Extended Kalman Filter) pour le cas des systèmes (faiblement) non linéaires. Nous ne détaillons pas ici les démonstrations qui aboutissent aux équations des filtres car ceci a déjà été présenté en [Dez93] et fait l'objet du complément de ce cours. De nombreux ouvrages existent sur le filtrage de Kalman, ses extensions et ses applications. On citera par exemple les ouvrages de base [Med69, Jaz70, SM71, Bie77, BDA79, BH92, BSL93].

### 1.1 Représentation d'état d'un système dynamique

Le filtrage de Kalman est un algorithme permettant d'estimer l'état  $\mathbf{x}(k)$  d'un système à temps discret (ici supposé linaire) stochastique modélisé par les équations de dynamique et d'observation suivantes :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (1.2)$$

$\mathbf{x}(k)$  est l'état du système. C'est un vecteur de dimension minimale permettant de décrire le comportement du système.  $\mathbf{F}(k)$  est la matrice de transition d'état caractérisant l'évolution du système.  $\mathbf{v}(k)$  est un vecteur de bruit d'état dont les propriétés statistiques (moyenne, covariance) caractérisent notre méconnaissance sur le système réel physique auquel on s'intéresse.  $\mathbf{z}(k)$  est l'observation du système obtenue au travers d'un senseur d'observation. L'ensemble de toutes les observations depuis l'instant initial jusqu'à l'instant  $k$  est noté  $\mathbf{Z}^k$ .  $\mathbf{H}(k)$  est la matrice d'observation de l'état du système.  $\mathbf{w}(k)$  est un bruit d'observation lié à la qualité du senseur utilisé. Les vecteurs et matrices ont bien entendu des dimensions compatibles.

Pour simplifier, on suppose ici que les bruits  $\mathbf{v}(k)$  et  $\mathbf{w}(k)$  sont des bruits blancs gaussiens et centrés ( $E[\mathbf{v}(k)] = 0$  et  $E[\mathbf{w}(k)] = 0$ ) de covariances respectives  $\mathbf{Q}(k)$  et  $\mathbf{R}(k)$  connues. Les matrices  $\mathbf{F}(k)$  et  $\mathbf{H}(k)$  sont également connues (pas de problème d'identification du modèle). On suppose que les bruits  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont non corrélés avec l'état initial  $\mathbf{x}(0)$  du système. On peut alors montrer que le système précédent est un système linéaire gaussien-markovien.

Le problème à résoudre consiste à estimer  $\mathbf{x}(k)$  à partir des mesures  $\mathbf{Z}^k$  et de préférence d'une manière récursive pour éviter le stockage croissant de  $\mathbf{Z}^k$ . Le filtre de Kalman permet de construire la solution à ce problème, c.à.d. calculer récursivement

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k] \quad (1.3)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = E[(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k))(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k))'| \mathbf{Z}^k] \quad (1.4)$$

## 1.2 Filtre de Kalman

Plusieurs voies sont possibles pour établir les équations du filtre ; on peut chercher

1. l'estimateur **à variance minimale**
2. l'estimateur qui **maximise la probabilité a posteriori** de  $\mathbf{x}(k)$  sachant  $\mathbf{Z}^k$
3. l'estimateur qui **maximise la vraisemblance** de  $\mathbf{x}(k)$
4. la solution **linéaire récursive au problème des moindres carrés pondérés** [Fav82]

Sous les hypothèses gaussiennes et pour un système linéaire, on peut montrer que toutes ces approches conduisent aux même équations. Ce sont les équations du **filtrage optimal de Kalman** [KB61]. Ce filtre est le meilleur filtre récursif (à variance minimale et non biaisé) dans la classe des filtres linéaires. Il n'est cependant pas optimal dans le cas des modèles non linéaires. En pratique cependant, on utilise souvent une variante du filtre appelée Filtre de Kalman étendu. Ce filtre a révolutionné le domaine de la théorie de l'estimation dans les années soixante et est à la base de nombreux systèmes de guidage et de poursuite en aéronautique. Il reste la base de la plupart des algorithmes de poursuite ici présentés.

### 1.2.1 Equations du filtre de Kalman

Les équations du filtre de Kalman sont données par :

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (1.5)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)' + \mathbf{R}(k) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)'\mathbf{S}(k)^{-1} \quad (1.8)$$

#### Partie correction du filtre

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (1.10)$$

#### Partie prédition du filtre

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}(k)' + \mathbf{Q}(k) \quad (1.12)$$

La matrice  $\mathbf{K}(k)$  est appelée gain de Kalman et  $\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1)$  l'innovation du filtre. Cette innovation est un bruit blanc centré de covariance  $\mathbf{S}(k)$ . L'initialisation peut se faire en choisissant  $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$ ,  $\mathbf{P}(0|0)$ , en supposant  $p(\mathbf{x}(0)) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}(0|0), \mathbf{P}(0|0))$  et entrant directement à l'étape de prédition du filtre. En simulations, on pourra utiliser la technique de Birniwal présentée dans le dernier chapitre de ce cours pour obtenir  $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$  et  $\mathbf{P}(0|0)$ .

### 1.2.2 Equations du filtre de Kalman étendu d'ordre 1

Le filtrage de Kalman étendu permet d'estimer (pas toujours ...) l'état des systèmes stochastiques non linéaires du type

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{v}(k) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{w}(k) \quad (1.14)$$

Les équations du **filtre de Kalman étendu** (EKF) sont alors obtenues en linéarisant (au premier ordre) les équations du système autour de l'état prédit et estimé. On obtient

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), k] \quad (1.15)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (1.16)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)' + \mathbf{R}(k) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)'\mathbf{S}(k)^{-1} \quad (1.18)$$

Partie correction du filtre

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (1.20)$$

Partie prédition du filtre

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(k|k), k] \quad (1.21)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}(k)' + \mathbf{Q}(k) \quad (1.22)$$

avec

$$\mathbf{R}(k) = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(k)'] \quad (1.23)$$

$$\mathbf{F}(k) = [\nabla \mathbf{f}'[\mathbf{x}(k), k]]'_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{H}(k) = [\nabla \mathbf{h}'[\mathbf{x}(k), k]]'_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)} \quad (1.25)$$

$\mathbf{F}(k)$  et  $\mathbf{H}(k)$  sont les matrices jacobiniennes de  $\mathbf{f}[\cdot]$  et  $\mathbf{h}[\cdot]$  évaluées en l'état prédict par le filtre à l'étape antérieure. Les performances du filtre dépendent de la qualité de l'adéquation entre le modèle non-linéaire choisi et l'évolution réelle du système physique; mais aussi du point de linéarisation choisi. L'EKF est sensible à la qualité de son initialisation. Pour avoir des performances meilleures, on peut utiliser une linéarisation au second ordre, ou mieux encore, un filtrage purement non-linéaire basé sur d'autres techniques (filtrage particulaire par exemple) qui reste souvent plus délicat à mettre en œuvre.  $\tilde{\mathbf{z}}$  est appelée innovation du filtre et  $\nabla$  est l'opérateur classique de gradient.

### 1.2.3 Un cycle du filtre de Kalman standard

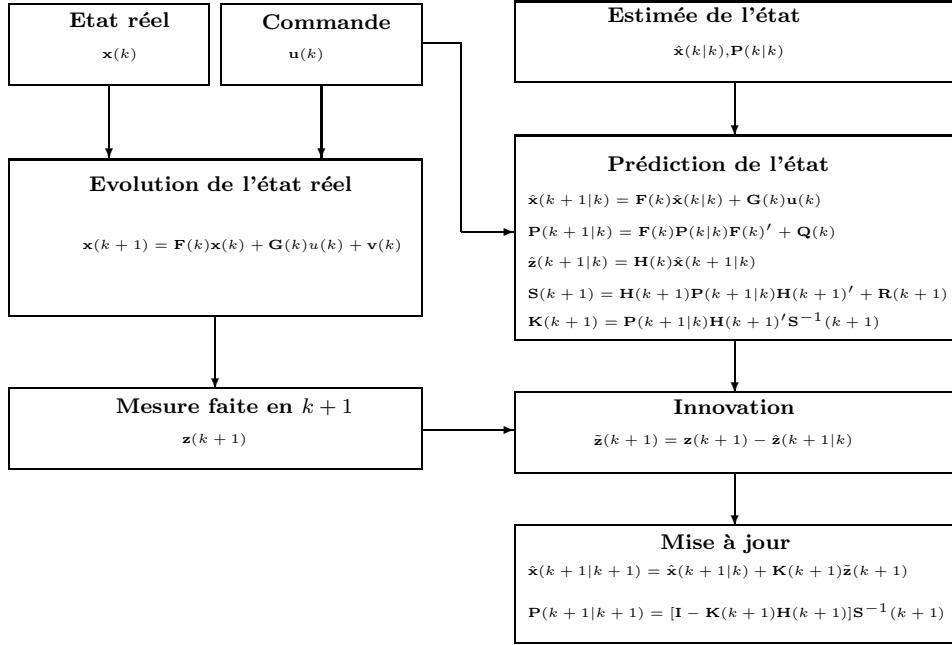


FIG. 1.1 – Cycle complet du filtre de Kalman

### 1.2.4 Un cycle du filtre de Kalman étendu

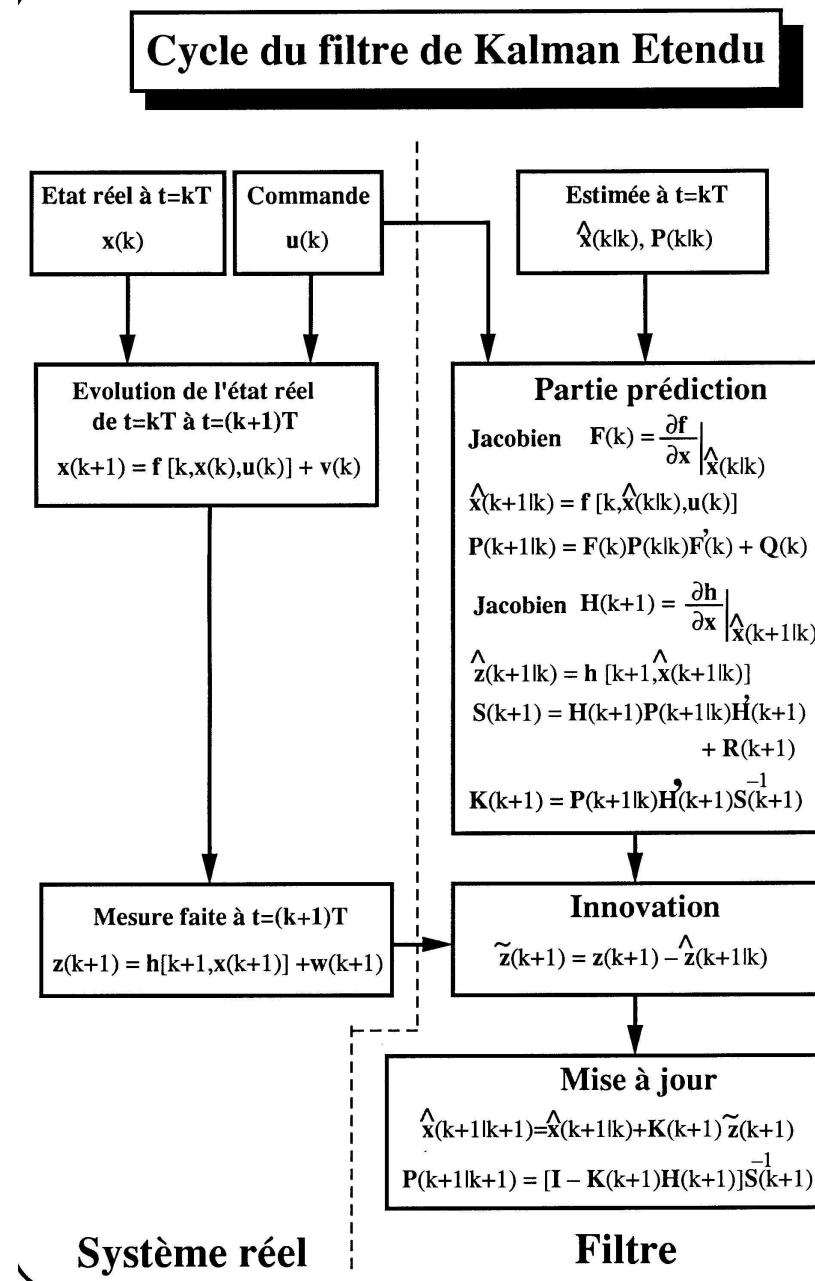


FIG. 1.2 – Cycle complet du filtre de Kalman étendu

## Chapitre 2

# Modèles cinématiques des cibles

Nous présentons dans ce chapitre quelques **modèles simples** d'évolution cinématique de cibles [BSF88, BSL93]. Ces modèles peuvent être facilement utilisés dans les simulations pour tester les différents algorithmes de pistage qui vont être présentés. Des modèles plus sophistiqués peuvent être par exemple trouvés en [Sin70, Bar90b, BHvD92, Nab97].

Les filtres de poursuite sont des méthodes numériques qui nécessitent l'emploi de calculateurs. Les modèles de dynamique des cibles doivent donc être formulés par des équations discrètes pour permettre leur simulation sur calculateur. En pratique, on peut soit partir des équations (différentielles) continues d'évolution de la cible que l'on discrétisera ; ou bien modéliser directement sous forme discrète l'évolution des cibles. La première approche est bien sûre plus satisfaisante puisqu'elle repose sur la nature physique du phénomène à observer et à pister. La seconde approche est généralement adoptée en simulations.

### 2.1 Modèles continus discrétisés

#### 2.1.1 Modèle à vitesse quasi-constante

Un objet en **mouvement rectiligne uniforme** (MRU) (à vitesse constante), est caractérisé par une **accélération nulle** sur chacune de ses coordonnées  $x, y$  ou  $z$ . Pour synthétiser cette présentation, on notera  $\xi$  la coordonnée générique qui peut soit désigner  $x, y$  ou  $z$ . On a donc

$$\ddot{\xi}(t) = 0 \quad (2.1)$$

En l'absence de bruits perturbateurs sur l'accélération, la position  $\xi(t)$  est une fonction polynomiale (d'ordre 2) du temps  $t$ . En pratique, la vitesse de l'objet n'est jamais parfaitement constante. En **première approximation** pour simplifier, on modélise généralement ces changements de vitesse par un **bruit continu d'accélération**  $\tilde{v}(t)$  que l'on suppose centré et de variance  $\tilde{q}(t)$ . Ainsi un modèle réaliste de

cible évoluant à vitesse quasi-constante est décrit par

$$\boxed{\ddot{\xi}(t) = \tilde{v}(t)} \quad (2.2)$$

avec  $E[\tilde{v}(t)] = 0$  et  $E[\tilde{v}(\tau)\tilde{v}(t)] = \tilde{q}(t)\delta(t - \tau)$ .

Le vecteur d'état  $\mathbf{x}(t)$  relatif à la composante générique  $\xi(t)$  s'écrit

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}} \quad (2.3)$$

L'évolution de l'état de la cible est alors représentée par l'équation différentielle suivante

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\tilde{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{v}(t)} \quad (2.4)$$

La vitesse  $\dot{\xi}(t)$  est donc **l'intégrale d'un bruit blanc**. C'est par définition un **processus de Wiener**.

La discrétisation [Dez93] de cette équation pour une période  $T$  donnée conduit à

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)} \quad (2.5)$$

avec

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

et le bruit discrétisé s'exprimant

$$\mathbf{v}(k) = \int_0^T e^{\mathbf{A}T} \mathbf{B} \tilde{v}(kT + \tau) d\tau \quad (2.7)$$

En **supposant  $\tilde{q}$  constant durant la période déchantillonnage  $T$** , la matrice de covariance  $\mathbf{Q}(k)$  du **bruit d'état discrétisé** vaudra

$$\boxed{\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(k)] = \int_0^T \begin{bmatrix} T - \tau \\ 1 \end{bmatrix} [(T - \tau) \ 1] \tilde{q} d\tau = \tilde{q} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}} \quad (2.8)$$

Pour assurer une trajectoire à vitesse quasi-constante, il faudra avoir un niveau de bruit  $\tilde{q}$  relativement faible (i.e. les variations de la vitesse doivent être petite par rapport à la valeur de la vitesse).

### 2.1.2 Modèle à accélération quasi-constante

Un objet en accélération constante est caractérisé par un **jerk nul**. Le jerk étant par définition la **dérivée de l'accélération**. On a donc maintenant

$$\boxed{\ddot{\xi}(t) = 0} \quad (2.9)$$

En l'absence de bruit perturbateur sur l'accélération, la position  $\xi(t)$  est une fonction polynomiale (d'ordre 3) du temps  $t$ . En pratique, l'accélération de l'objet n'est jamais parfaitement constante mais présente des fluctuations. En **première approximation** pour simplifier, on modélise ces fluctuations par un **bruit continu de jerk**  $\tilde{v}(t)$  que l'on suppose centré et de variance  $\tilde{q}(t)$ . Ainsi un modèle réaliste de cible évoluant à accélération quasi-constante est décrit par

$$\ddot{\xi}(t) = \tilde{v}(t) \quad (2.10)$$

avec  $E[\tilde{v}(t)] = 0$  et  $E[\tilde{v}(\tau)\tilde{v}(t)] = \tilde{q}(t)\delta(t - \tau)$ .

Le vecteur d'état  $\mathbf{x}(t)$  relatif à la composante générique  $\xi(t)$  s'écrit maintenant

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

L'évolution de l'état de la cible est alors représentée par l'équation différentielle suivante

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\tilde{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{v}(t) \quad (2.12)$$

L'accélération  $\ddot{\xi}(t)$  est alors un **processus de Wiener**.

D'autres modélisations plus sophistiquées sont possibles. On peut par exemple prendre un bruit de jerk coloré ayant une fonction d'autocorrélation à décroissance exponentielle (**modèle de Singer**).

La discréétisation [Dez93] de la relation (2.12) pour une période  $T$  donnée conduit à

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2.13)$$

avec

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où l'expression de  $\mathbf{v}(k)$  reste la même que la précédente (cf (2.7)). En **supposant  $\tilde{q}$  constant durant la période déchantillonnage  $T$** , la matrice de covariance  $\mathbf{Q}(k)$  du bruit d'état discréétisé vaudra

maintenant

$$\boxed{\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(k)] = \tilde{q} \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T^5 & \frac{1}{8}T^4 & \frac{1}{6}T^3 \\ \frac{1}{8}T^4 & \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{6}T^3 & \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}} \quad (2.15)$$

Pour assurer une trajectoire à accélération quasi-constante, il faudra avoir un niveau de bruit  $\tilde{q}$  relativement faible (i.e. les variations de l'accélération doivent être petites par rapport à la valeur de l'accélération).

## 2.2 Modèles discrets

Nous explicitons ici directement les équations discrètes des mouvements à vitesse et/ou accélération quasi-constante. Dans ce cas, le bruit d'état  $v(k)$  est modélisé comme un **bruit blanc centré discret** de variance donnée

$$E[v_k v_j] = \sigma_v^2 \delta_{kj} \quad (2.16)$$

L'équation **discrète** d'évolution de l'état pour les mouvements à vitesse et/ou accélération quasi-constante (pour une coordonnée générique  $x, y$  ou  $z$ ) est de la forme générale (on suppose ici qu'il n'y a pas de commande déterministe supplémentaire  $\mathbf{u}(k) = 0$ )

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}(k) \quad (2.17)$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}$  est une matrice de gain agissant sur le bruit discret.

### 2.2.1 Modèle cinématique discret à vitesse quasi-constante

Quand le bruit discret d'accélération  $v(k)$  est **constant durant la période de discréétisation** allant de  $kT$  à  $(k+1)T$ , l'incrément de la vitesse sur  $\dot{\xi}(k)$  vaut  $v(k)T$ , et l'incrément sur la position  $\xi(k)$  vaut  $\frac{1}{2}v(k)T^2$ . Par conséquent, l'équation aux différences du vecteur d'état

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(k) \end{bmatrix}} \quad (2.18)$$

s'écrit

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\Gamma}v(k)} \quad (2.19)$$

avec

$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix}} \quad (2.20)$$

La matrice de covariance de  $\Gamma v(k)$  vaudra

$$\boxed{\mathbf{Q} = E[\Gamma v(k)v(k)\Gamma'] = \Gamma\sigma_v^2\Gamma' = \sigma_v^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 \end{bmatrix}} \quad (2.21)$$

Pour un **mouvement en dimension 2** avec bruits de composantes découpés, on aura donc

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ y(k+1) \\ \dot{y}(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix}}_{\Gamma} \mathbf{v}(k) \quad (2.22)$$

avec  $\mathbf{v}(k) = [v_x(k) \ v_x(k)]'$ .

La covariance  $\mathbf{Q}(k)$  s'écrira alors

$$\boxed{\mathbf{Q} = E[\Gamma \mathbf{v}(k) \mathbf{v}'(k) \Gamma'] = \Gamma \mathbf{q}_v \Gamma' = \Gamma \begin{bmatrix} \sigma_{v_x}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_y}^2 \end{bmatrix} \Gamma'} \quad (2.23)$$

Quand la variance  $\sigma_{v_x}^2 \equiv \sigma_{v_y}^2$  du bruit de dynamique est faible, on obtient une trajectoire rectiligne quasi-uniforme (mouvement rectiligne uniforme - **MRU** ou Constant Velocity model (**CV**)). L'**extension au cas 3D est immédiate**.

En choisissant ce modèle discret avec un niveau du bruit d'état élevé, on peut arriver à pister des cibles faiblement manœuvrantes. Il faut souligner que les **résultats obtenus varieront avec la période de discréttisation  $T$**  utilisée.

### 2.2.2 Modèle cinématique discret à accélération quasi-constante

Quand le **bruit discret**  $v(k)$  polluant l'accélération est **constant durant la période de discréttisation** allant de  $kT$  à  $(k+1)T$ , l'équation aux différences du vecteur d'état s'exprime alors

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(k) \\ \ddot{\xi}(k) \end{bmatrix}} \quad (2.24)$$

s'écrit

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \Gamma v(k)} \quad (2.25)$$

avec

$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (2.26)$$

La matrice de covariance de  $\mathbf{\Gamma}v(k)$  vaudra

$$\boxed{\mathbf{Q} = E[\mathbf{\Gamma}v(k)v(k)\mathbf{\Gamma}'] = \mathbf{\Gamma}\sigma_v^2\mathbf{\Gamma}' = \sigma_v^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 & T \\ \frac{1}{2}T^2 & T & 1 \end{bmatrix}} \quad (2.27)$$

Pour un **mouvement en dimension 2** avec bruits de composantes découpés, on aura donc

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ \ddot{x}(k+1) \\ y(k+1) \\ \dot{y}(k+1) \\ \ddot{y}(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \mathbf{v}(k) \quad (2.28)$$

avec  $\mathbf{v}(k) = [v_x(k) \ v_x(k)]'$ . Quand la variance  $\sigma_{v_x}^2 \equiv \sigma_{v_y}^2$  du bruit (discret) de dynamique est faible, on obtient un mouvement à accélération quasi-constante. Ce modèle est adapté à la poursuite des cibles dans les phases de manœuvre.

### 2.2.3 Modèle du virage coordonné

Le mouvement d'une cible exécutant un **virage coordonné** (i.e. à vitesse angulaire constante  $\omega$ ) dans le plan  $(O, x, y)$  est caractérisé par les équations de mouvement suivantes

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega\dot{y}(t) \quad \ddot{y}(t) = \omega\dot{x}(t)} \quad (2.29)$$

Un virage dans le sens horaire (à droite) est obtenu lorsque  $\omega < 0$ . Si  $\omega > 0$  alors le virage a lieu dans le sens trigonométrique (à gauche).

- **Quand  $\omega$  est connu** (cas des avions civils par exemple), on prend pour vecteur d'état

$$\mathbf{x}(t) \triangleq [x(t) \ \dot{x}(t) \ y(t) \ \dot{y}(t)]' \quad (2.30)$$

L'équation différentielle (non bruitée) du vecteur d'état s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.31)$$

La discréétisation de cette équation [Dez93] à la période d'échantillonnage  $T$ , conduit à l'équation d'évolution non bruitée suivante

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos \omega T}{\omega} \\ 0 & \cos \omega T & 0 & -\sin \omega T \\ 0 & \frac{1-\cos \omega T}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} \\ 0 & \sin \omega T & 0 & \cos \omega T \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) \quad (2.32)$$

En tenant compte des bruits d'états (supposés blancs, gaussiens et indépendants) sur les composantes de vitesse, il vient finalement

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{v}(k)} \quad (2.33)$$

avec

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

avec  $\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)'] = \sigma_v^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- **Quand  $\omega$  est inconnu**, on prend pour vecteur d'état

$$\mathbf{x}(t) \triangleq [x(t) \dot{x}(t) y(t) \dot{y}(t) \omega]' \quad (2.35)$$

L'équation différentielle (non bruitée) du vecteur d'état s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.36)$$

La discréétisation de cette équation [Dez93] à la période d'échantillonnage  $T$ , conduit maintenant à

l'équation d'évolution non bruitée suivante

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos \omega T}{\omega} & 0 \\ 0 & \cos \omega T & 0 & -\sin \omega T & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos \omega T}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 \\ 0 & \sin \omega T & 0 & \cos \omega T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{x}(k) \quad (2.37)$$

En tenant compte d'un bruit d'état  $\mathbf{v}(k)$  sur les composantes de vitesses, on aura

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma} \mathbf{v}(k) \quad (2.38)$$

avec

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

avec  $\mathbf{Q}(k) = \sigma_v^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Dans ce cas la matrice  $\mathbf{F}$  sera évaluée à chaque pas en utilisant la valeur estimée  $\hat{\omega}$  à l'étape antérieure du filtre.

## 2.3 Modèle de cible absente

Dans certains cas (pour la poursuite multi-modèle par exemple), il est parfois utile d'avoir un modèle fictif décrivant l'absence de cible. Le plus simple est d'utiliser le modèle à vitesse constante mais en forçant par ailleurs la probabilité de détection de la cible à zéro ( $P_d = 0$ ).

# Chapitre 3

## Pistage mono-cible mono-senseur

### 3.1 Validation des mesures

Dans un environnement dégradé, à chaque instant  $k$  on dispose généralement d'un ensemble de mesures délivrées par le senseur d'observation. Nous supposons ici que **les cibles apparaissent ponctuelles** au niveau du senseur (la taille des cibles est inférieure à la cellule de résolution du senseur). Lorsqu'une cible apparaît simultanément dans plusieurs cellules du senseur, on dit que la cible est **étendue**. Le pistage de cibles étendues non abordé ici, a déjà fait l'objet d'investigations en [Dez98].

Certaines de ces mesures (ponctuelles) proviennent des cibles (lorsqu'elles sont détectées) et d'autres proviennent de bruits liés au récepteur (réglage des seuils), à l'environnement (trajets multiples, clutter, etc) et/ou à des phénomènes intentionnels comme par exemple le leurrage ou les contre-mesures électroniques (ECM - Electronic Counter Measures). Toutes les mesures ne provenant pas des cibles sont considérées ici comme des **fausses alarmes (FA)**.

Pour limiter le nombre de mesures à traiter, on utilise généralement une technique de sélection des mesures appelée **fenêtrage statistique** ou test de validation  $T(\mathbf{z})$  (**gating**) [Sit64]. Pour chaque cible, Le fenêtrage consiste à délimiter, à partir de la mesure prédictive  $\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$  et de la covariance prédictive  $\mathbf{S}(k)$  de l'erreur prédition de mesure, un certain volume  $V_k$  de l'espace d'observation où la mesure de la cible à une forte probabilité  $P_g$  de se trouver. Les mesures statistiquement trop éloignées de la mesure prédictive par le système de poursuite sont ainsi éliminées pour réduire le nombre de mesures à traiter au niveau des algorithmes de pistage. Les mesures non rejetées par  $T(\mathbf{z})$  sont dites **validées**.

Pour construire le test de validation  $T(\mathbf{z}(k))$ , on suppose que la mesure à tester  $\mathbf{z}(k)$  provient de la cible considérée et que la densité de probabilité de l'état  $\mathbf{x}(k)$  de cette cible connaissant l'ensemble des

mesures validées antérieures  $\mathbf{Z}^{k-1}$  vérifie

$$\boxed{p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{P}(k|k-1))} \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{P}(k|k-1))$  désigne la densité gaussienne de moyenne  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  et de covariance  $\mathbf{P}(k|k-1)$ . Les statistiques prédictes  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  et  $\mathbf{P}(k|k-1)$  sont disponibles à l'instant  $k$ . Avec cette hypothèse et si le modèle d'observation est linéaire du type

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (3.2)$$

avec  $p(\mathbf{w}(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{w}(k); 0, \mathbf{R}(k))$ , alors la densité de probabilité conditionnelle de la mesure de la cible  $p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})$  s'écrit

$$\boxed{p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \tilde{\mathbf{z}}(k|k-1), \mathbf{S}(k))} \quad (3.3)$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{p(\tilde{\mathbf{z}}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) = \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{z}}(k); 0, \mathbf{S}(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{n_z/2}\sqrt{|\mathbf{S}(k)|}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}(k)'\mathbf{S}^{-1}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k)}} \quad (3.4)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) - \tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)' + \mathbf{R}(k) \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Test de validation

Le test de validation s'obtient en imposant un seuil minimal à la densité de la mesure  $p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})$ ; d'où le résultat

$$\boxed{T(\mathbf{z}(k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\mathbf{z}}(k)'\mathbf{S}^{-1}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k) \leq \gamma & \mathbf{z} \text{ validée} \\ 0 & \text{si } \tilde{\mathbf{z}}(k)'\mathbf{S}^{-1}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k) > \gamma & \mathbf{z} \text{ rejetée} \end{cases}} \quad (3.8)$$

Le **seuil de validation**  $\gamma$  est fixé en choisissant la taille de la fenêtre de validation de telle sorte que la probabilité de trouver la mesure correcte à l'intérieur de celle-ci soit égale à une valeur choisie  $P_g$ .

L'inégalité  $\tilde{\mathbf{z}}(k)'\mathbf{S}^{-1}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k) \leq \gamma$  définit un **ellipsoïde** dans l'espace d'observation. La distance au carré  $\epsilon_{\mathbf{z}}(k) \triangleq \tilde{\mathbf{z}}(k)'\mathbf{S}^{-1}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k)$  est aussi appelée **distance de Mahalanobis** ou carré de l'innovation normalisée (**NIS - Normalized Innovation Squared**).

L'innovation  $\tilde{\mathbf{z}}(k)$  étant une variable aléatoire gaussienne centrée de dimension  $n_z$ ,  $\epsilon_{\mathbf{z}}(k)$  est une variable aléatoire qui suit une loi du  $\chi^2_{n_z}$  à  $n_z$  degrés de libertés (cf théorème 1.4.1 de [Mui82]). La

densité de probabilité de  $\epsilon_{\mathbf{z}}(k)$  s'exprime (cf [Pap84] p.187)

$$p(\epsilon_{\mathbf{z}}(k)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \epsilon_{\mathbf{z}}(k) < 0 \\ \frac{1}{2^{n_z/2}\Gamma(n_z/2)}\epsilon_{\mathbf{z}}(k)^{\frac{1}{2}n_z-1}e^{-\frac{1}{2}\epsilon_{\mathbf{z}}(k)} & \text{pour } \epsilon_{\mathbf{z}}(k) \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Probabilité de fenêtrage

La probabilité de validation  $P_g$  et le seuil de fenêtrage  $\gamma$  sont liés par la relation suivante

$$P_g = P\{\mathbf{z}(k) \in V_k\} = P\{\chi_{n_z}^2 \leq \gamma\} = \int_0^\gamma p(\epsilon_{\mathbf{z}}(k))d\epsilon_{\mathbf{z}}(k) = \frac{1}{2^{n_z/2}\Gamma(n_z/2)} \int_0^\gamma \epsilon_{\mathbf{z}}^{n_z/2-1} e^{\epsilon_{\mathbf{z}}/2} d\epsilon_{\mathbf{z}} \quad (3.10)$$

Sous MatLab, le seuil  $\gamma$  peut être calculé par la commande `Gamma_Threshold=chi2inv(Pg,nz)`. L'ellipsoïde de validation  $\mathcal{V}_k(\gamma)$  est mathématiquement défini comme

$$\mathcal{V}_k(\gamma) \triangleq \{\mathbf{z}(k) \text{ tel que } [\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)]' \mathbf{S}^{-1}(k) [\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)] \leq \gamma\} \quad (3.11)$$

Les demi-axes de l'ellipsoïde (9.5) sont les racines carrées des termes diagonaux de la matrice  $\gamma \mathbf{S}(k)$ . La racine carrée  $g \triangleq \sqrt{\gamma}$  est appelée **nombre de sigma** (d'écart types) de la fenêtre de validation.

Souvent en pratique, on fixe  $P_g = 0.99$ . Voici quelques valeurs de seuil de fenêtrage :

$P_g$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250
$n_z = 1$	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0.102
$n_z = 2$	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575
$n_z = 3$	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21
$n_z = 4$	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92

TAB. 3.1 – Valeur du seuil  $\gamma$  en fonction de  $P_g$  et  $n_z$

### 3.1.3 Volume de la fenêtre de validation

Le volume  $V_k$  de l'ellipsoïde de validation des mesures est donné par

$$V_k = C_{n_z} \sqrt{|\mathbf{S}(k)|} \gamma^{n_z/2} \quad (3.12)$$

où le coefficient  $C_{n_z}$  vaut

$$C_{n_z} = \frac{\pi^{n_z/2}}{\Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{\pi^{n_z/2}}{(\frac{n_z}{2})!} & \text{pour } n_z \text{ pair} \\ \frac{2^{n_z+1}(n_z+1/2)!}{(n_z+1)!} \pi^{(n_z-1)/2} & \text{pour } n_z \text{ impair} \end{cases} \quad (3.13)$$

Cette constante peut être obtenue sous MatLab par la commande `Cnz=pi^(nz/2)/gamma(1+nz/2)`; Nous donnons la valeur de  $C_{n_z}$  pour  $n_z = 1, \dots, 8$

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 & C_2 &= \pi & C_3 &= \frac{4}{3}\pi & C_4 &= \frac{1}{2}\pi^2 \\ C_5 &= \frac{8}{3}\pi^2 & C_6 &= \frac{1}{6}\pi^3 & C_7 &= \frac{16}{105}\pi^3 & C_8 &= \frac{1}{24}\pi^4 \end{aligned}$$

### 3.1.4 Types de mesures utilisées

- Pour un radar : la distance  $r$  (**range**), le gisement  $a$  (**azimuth** ou **bearing**) et le site  $e$  (**elevation**). Plus éventuellement la vitesse radiale  $\dot{r}$  et/ou les cosinus directeurs  $u$  et  $v$  de la direction de visée du radar [Gué94].
- Pour un sonar passif : le gisement  $a$  et la fréquence  $f$  (quand le signal est à bande étroite) ou bien la différence des temps de réception et d'émission (**TDOA** - Time Difference Of Arrival) et les variations des fréquences.
- Pour les senseurs optiques : les angles entre deux lignes de visée ou cosinus directeurs

## 3.2 Filtre NNSF (<1970)

Le filtre **NNSF** (Nearest Neighbor Standard Filter) consiste à utiliser uniquement à chaque instant  $k$  la mesure validée  $\mathbf{z}(k)$  **la plus proche de la mesure prédictive** de la cible  $\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$  pour mettre à jour l'état de la piste. Le filtre de poursuite consiste généralement en un filtre de Kalman standard (**KF**) ou étendu (**EKF**) selon le type de modèle utilisé.

La notion de proximité à la prédition est basée sur la valeur de l'innovation normalisée (**NIS**) définie par

$$\epsilon_{\mathbf{z}}(k) \triangleq [\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)]' \mathbf{S}(k)^{-1} [\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)] \quad (3.14)$$

On choisit donc la mesure  $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{Z}(k)$  telle que  $\epsilon_{\mathbf{z}}(k)$  soit minimale. Dans cette méthode, on suppose que le choix de la mesure la plus proche correspond toujours au bon choix d'association mesure↔cible. Le doute sur la validité d'un tel choix n'est pas pris en compte. Bien qu'extrêmement simple à mettre en œuvre, cette méthode conduit à des performances très médiocres de pistage quand la densité des fausses alarmes est importante. Elle est donc fortement déconseillée.

## 3.3 Filtre SNSF (<1970)

Le filtre **SNSF** (Strongest Neighbor Standard Filter) est une variante du filtre NNSF. L'idée consiste non plus à utiliser à chaque instant  $k$  la mesure validée  $\mathbf{z}(k)$  la plus proche de la mesure prédictive de la cible  $\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$  pour mettre à jour l'état de la piste, mais uniquement la mesure **de plus forte**

**intensité.** Le filtre de poursuite consiste généralement en un filtre de Kalman standard (**KF**) ou étendu (**EKF**) selon le type de modèle utilisé. Pour cela, on doit évidemment disposer de l'intensité des signaux associés aux mesures validées. Ce type de filtre est encore souvent utilisé dans les systèmes Sonar.

Comme pour le NNSF, le SNSF utilise une heuristique d'association mesure↔cible. Le doute sur la validité d'un tel choix n'est pas pris en compte et conduit là aussi à des performances très médiocres de pistage quand la densité des fausses alarmes est importante.

Une version améliorée du SNSF appelée **PSNF** (Probabilistic Strongest Neighbor Filter) qui prend en compte la probabilité d'association correcte de la mesure la plus forte a récemment été proposée en [LZ96, LZ99].

### 3.4 Filtre PNNF (1971,1993)

Le filtre **PNNF** (Probabilistic Nearest Neighbor Filter) consiste à utiliser uniquement à chaque instant  $k$  la mesure validée la plus proche (notée  $\mathbf{z}_*(k)$ ) de la mesure prédite de la cible  $\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$  pour mettre à jour l'état de la piste. **La mesure choisie est cependant pondérée par sa probabilité d'être correcte.**

Cette idée fut initialement proposée en [SS71b, SS73] en utilisant la **probabilité a priori** de validité de la mesure la plus proche.

L'introduction de la **probabilité a posteriori** de validité de la mesure la plus proche dans les équations de mise à jour du filtre fut proposée d'abord en [JBS72] puis reprise récemment en [Li93, LBS96b].

L'idée consiste à introduire les évènements suivants :

$$M_0 : \text{aucune mesure est validée} \quad (3.15)$$

$$M_T : \text{la mesure la plus proche de } \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) \text{ provient de la cible} \quad (3.16)$$

$$M_F : \text{la mesure la plus proche de } \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) \text{ provient d'une fausse alarme} \quad (3.17)$$

On montre [LBS96b] (sous les hypothèses d'indépendance des FA et de la mesure cible et d'un clutter poissonien de densité  $\lambda$ ) que la probabilité  $P\{M_0|\mathbf{Z}^{k-1}\}$  de n'avoir aucune mesure validée est donnée par

$$\boxed{P\{M_0|\mathbf{Z}^{k-1}\} = (1 - P_d P_g) e^{-\lambda V_k(\gamma)}} \quad (3.18)$$

La densité de probabilité de la mesure la plus proche **quand elle provient de la cible** est donnée par

$$p_{\mathbf{z}_*}(\mathbf{z}|M_T, \mathbf{Z}^{k-1}) = \frac{P_d}{P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\}} e^{-\lambda V_{\epsilon_{\mathbf{z}}}} \mathcal{N}(\mathbf{z}; \hat{\mathbf{z}}(k|k-1), \mathbf{S}(k)) U(\mathbf{z}; V_k(\gamma)) \quad (3.19)$$

où  $V_k(\gamma)$  est la fenêtre de validation de seuil  $\gamma$  et  $U(\mathbf{z}; V_k(\gamma))$  est la fonction échelon unitaire définie comme

$$U(\mathbf{z}; V_k(\gamma)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{z} \in V_k(\gamma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.20)$$

$V_{\epsilon_{\mathbf{z}}}$  est le volume de validation de seuil  $\sqrt{\epsilon_{\mathbf{z}}}$ . La probabilité d'association correcte  $P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\}$  est donnée par

$$P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{P_d}{2^{n_z/2} \Gamma(n_z/2)} \int_0^\gamma \epsilon^{n_z/2-1} e^{-\lambda V_{\epsilon}-\epsilon/2} d\epsilon \leq P_d P_g \quad (3.21)$$

La densité  $p_{\mathbf{z}_*}(\mathbf{z}|M_T, \mathbf{Z}^{k-1})$  n'est pas gaussienne mais seulement **elliptiquement symétrique** [FKN90]. C'est à dire,

$$p_{\mathbf{z}_*}(\mathbf{z}|M_T, \mathbf{Z}^{k-1}) = p(\epsilon_{\mathbf{z}}|M_T, \mathbf{Z}^{k-1}) \quad (3.22)$$

Elle est gaussienne uniquement dans le cas particulier où  $n_z = 2$ . Son expression est donnée en [LBS96b]. On montre que l'on a

$$p_{\epsilon_{\mathbf{z}_*}}(\epsilon|M_T, \mathbf{Z}^{k-1}) = \frac{P_d}{P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\}} \frac{n_z V_{\epsilon}}{2\epsilon} \frac{e^{-\epsilon/2}}{\sqrt{|2\pi \mathbf{S}(k)|}} e^{-\lambda V_{\epsilon}} U(\epsilon; (0; \gamma)) \quad (3.23)$$

La densité de probabilité de la mesure la plus proche **quand c'est une fausse alarme** est donnée par

$$p_{\mathbf{z}_*}(\mathbf{z}|M_F, \mathbf{Z}^{k-1}) = \frac{\lambda e^{-\lambda V_{\epsilon}}}{P\{M_F|\mathbf{Z}^{k-1}\}} [1 - P_d P\{\chi_{n_z}^2 \leq \epsilon\}] U(\epsilon; (0; \gamma)) \quad (3.24)$$

avec

$$P\{\chi_{n_z}^2 \leq \epsilon\} = \int_0^\epsilon \frac{u^{n_z/2-1} e^{-u/2}}{2^{n_z/2} \Gamma(n_z/2)} du \quad (3.25)$$

La densité  $p_{\epsilon_{\mathbf{z}_*}}(\epsilon|M_F, \mathbf{Z}^{k-1})$  de la NIS  $\epsilon_{\mathbf{z}_*}$  la plus proche s'exprime alors comme

$$p_{\epsilon_{\mathbf{z}_*}}(\epsilon|M_F, \mathbf{Z}^{k-1}) = \frac{n_z V_{\epsilon}}{2\epsilon} \frac{\lambda e^{-\lambda V_{\epsilon}}}{P\{M_F|\mathbf{Z}^{k-1}\}} [1 - P_d P\{\chi_{n_z}^2 \leq \epsilon\}] U(\epsilon; (0; \gamma)) \quad (3.26)$$

La probabilité d'association incorrecte  $P\{M_F\}$  est donnée par

$$P\{M_F|\mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{n_z \lambda}{2} \int_0^\gamma \frac{V_{\epsilon} e^{-\lambda V_{\epsilon}}}{\epsilon} [1 - P_d P\{\chi_{n_z}^2 \leq \epsilon\}] d\epsilon = 1 - (1 - P_d P_g) e^{-\lambda V_k(\gamma)} - P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\}$$

où  $P_g$  est la probabilité du fenêtrage définie en (9.6).

Le calcul des probabilités  $P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\}$  et  $P\{M_F|\mathbf{Z}^{k-1}\}$  nécessite l'utilisation de méthodes numériques d'intégration. Dans le cas particulier où  $n_z = 2$  et en utilisant le fait que  $P_g = 1 - e^{\gamma/2}$ , on dispose d'une expression analytique de ces probabilités.

$$P\{M_F|\mathbf{Z}^{k-1}\} = (1 - P_d)(1 - e^{-b\gamma}) + P_d \frac{b}{a}(1 - e^{-a\gamma}) \quad (3.27)$$

$$P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\} = P_d \frac{1}{2a}(1 - e^{-a\gamma}) \quad (3.28)$$

avec  $b \triangleq \lambda C_{n_z} \sqrt{|\mathbf{S}(k)|}$  et  $a \triangleq b + \frac{1}{2}$ .

Quand la densité  $\lambda$  du clutter tend vers 0 (environnement clair), on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P\{M_0|\mathbf{Z}^{k-1}\} = 1 - P_d P_g \quad (3.29)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P\{M_T|\mathbf{Z}^{k-1}\} = P_d P_g \quad (3.30)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P\{M_F|\mathbf{Z}^{k-1}\} = 0 \quad (3.31)$$

L'estimateur PNNF est alors donné par la règle des probabilités totales conditionnellement aux événements  $M_0$ ,  $M_1 \equiv M_F$  et  $M_2 \equiv M_T$ . Autrement dit,

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{i=0}^2 P\{M_i(k)|\mathbf{Z}^k\} E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k, M_i(k)] = \sum_{i=0}^2 \beta_i(k) \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \quad (3.32)$$

Pour  $i = 0$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_0(k|k)$  est donné par  $\hat{\mathbf{x}}_0(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ . Pour  $i = 1, 2$ , on utilise l'équation de mise à jour de Kalman

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \tilde{\mathbf{z}}_i(k) \quad (3.33)$$

avec  $\tilde{\mathbf{z}}_1(k) \equiv \tilde{\mathbf{z}}_2(k) \triangleq \mathbf{z}_*(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$ . Le calcul des  $\beta_i(k) \triangleq P\{M_i(k)|\mathbf{Z}^k\}$  est obtenu de la manière suivante

$$\beta_i(k) \triangleq P\{M_i(k)|\mathbf{Z}^k\} = P\{M_i(k)|\mathbf{z}_* = \mathbf{z}(k), \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{1}{c} p_{\mathbf{z}_*}(\mathbf{z}(k)|M_i(k), \mathbf{Z}^{k-1}) P\{M_i(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\} \quad (3.34)$$

où  $c$  est une constante de normalisation assurant  $\sum_{i=0}^2 \beta_i(k) = 1$ . L'expression des probabilités a priori  $P\{M_i(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\}$  et a posteriori  $p_{\mathbf{z}_*}(\mathbf{z}(k)|M_i(k), \mathbf{Z}^{k-1}) \equiv p_{\epsilon_{\mathbf{z}_*}}(\epsilon|M_i(k), \mathbf{Z}^{k-1})$  vient d'être présentée (en prenant dans le cas  $M_0(k)$ , la densité dégénérée  $p_{\mathbf{z}_*}(\emptyset|M_0(k), \mathbf{Z}^{k-1}) \equiv 1$ ).

La forme globale de l'estimateur  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  et de sa covariance associée  $\mathbf{P}(k|k)$  est la même que celle du PDAF classique et ne sera pas répétée ici. La prédition des performances de ce type de filtre par la méthode **CMC-HYCA** (Current-Mode-Conditional HYbrid Conditional Averaging) est présentée en détail en [LBS96b].

### 3.5 Filtre bayésien optimal (1974)

Nous décrivons ici le principe du filtre de bayésien optimal (**FBO**) pour la poursuite d'une cible unique dans un environnement dégradé par des fausses alarmes. Ce filtre a été présenté en 1974 par Singer, Sea et Housewright [SSH74]. L'idée de base est d'utiliser toutes les mesures disponibles  $\mathbf{Z}^k$  depuis l'instant initial jusqu'à l'instant courant  $k$ .

On définit une séquence particulière possible (indexée par  $l$ ) comme un ensemble consécutif de mesures prises depuis l'instant initial jusqu'à l'instant  $k$ . Mathématiquement, on la désignera par

$$\boxed{\mathbf{Z}^{k,l} \triangleq \{\mathbf{z}_{i_l}(1), \dots, \mathbf{z}_{i_l}(k)\} \in \mathbf{Z}^k} \quad (3.35)$$

Cette séquence est en fait constituée d'une séquence particulière antérieure notée  $\mathbf{Z}^{k-1,s}$  et de la mesure  $\mathbf{z}_{i_l}(k)$ . Ce qui peut s'écrire

$$\boxed{\mathbf{Z}^{k,l} = \{\mathbf{Z}^{k-1,s}, \mathbf{z}_{i_l}(k)\}} \quad (3.36)$$

Le nombre total possible de séquences de mesures que l'on peut ainsi construire au temps  $k$  est  $N_k$  avec

$$N_k = \prod_{j=1}^k (m_j + 1) \quad (3.37)$$

où  $m_j$  est le nombre de mesures validées à l'instant  $j$ . Le rajout de la constante 1 permet de prendre en compte l'hypothèse selon laquelle aucune des mesures validées à un instant  $j$  donné ne provient de la cible pistée. On désigne par  $\mathbf{m}^k$  le vecteur dont les composantes représentent le nombre de mesures validées à chaque instant, i.e.

$$\mathbf{m}^k \triangleq [m_1 \dots m_k]' \quad (3.38)$$

Pour construire l'estimateur bayésien optimal, il nous faut pouvoir évaluer la probabilité conditionnelle (c.à.d sachant les mesures disponibles  $\mathbf{Z}^k$  et  $\mathbf{m}^k$ ) de réalisation de chaque séquence possible  $\mathbf{Z}^{k,l}$  que l'on note  $\theta^l(k)$ . En d'autres termes, on doit évaluer les probabilités

$$\boxed{\beta^l(k) \triangleq P\{\theta^l(k)|\mathbf{Z}^k, \mathbf{m}^k\} \quad \text{pour } l = 1, \dots, N_k} \quad (3.39)$$

#### 3.5.1 Forme de l'estimateur optimal

En supposant ces probabilités disponibles, l'estimateur bayésien optimal s'écrit

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k, \mathbf{m}^k] = \sum_{l=1}^{N_k} \beta^l(k) \hat{\mathbf{x}}^l(k|k)} \quad (3.40)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}^l(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k,l}, \mathbf{m}^k]$  est l'estimée conditionnée par la réalisation possible de  $\mathbf{Z}^{k,l}$  et de  $\mathbf{m}^k$ .

Compte tenu de la décomposition (3.36), on aura

$$\hat{\mathbf{x}}^l(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^s(k|k-1) + \mathbf{K}^l(k)[\mathbf{z}_{i_l}(k) - \hat{\mathbf{z}}^s(k|k-1)] \quad (3.41)$$

$\hat{\mathbf{z}}^s(k|k-1)$  est la mesure prédictive à partir de la séquence  $\mathbf{Z}^{k-1,s}$  ayant pour covariance  $\mathbf{S}^s(k)$ . Le gain  $\mathbf{K}^l(k)$  vaut

$$\mathbf{K}^l(k) = \mathbf{P}^s(k|k-1)\mathbf{H}(k)[\mathbf{S}^s(k)]^{-1} \quad (3.42)$$

La covariance conditionnelle  $\mathbf{P}^l(k|k)$  associée à  $\hat{\mathbf{x}}^l(k|k)$  s'écrit

$$\mathbf{P}^l(k|k) = E[(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^l(k|k))(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^l(k|k))' | \theta^l(k), \mathbf{Z}^k, \mathbf{m}^k] = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^l(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}^s(k|k-1) \quad (3.43)$$

La covariance associée à  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  s'écrit

$$\mathbf{P}(k|k) = \sum_{l=1}^{N_k} \beta^l(k)\mathbf{P}^l(k|k) + \sum_{l=1}^{N_k} \beta^l(k)\hat{\mathbf{x}}^l(k|k)\hat{\mathbf{x}}^{l'}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)\hat{\mathbf{x}}'(k|k) \quad (3.44)$$

### 3.5.2 Expression des probabilités

On veut calculer pour  $l = 1, \dots, N_k$

$$\beta^l(k) \triangleq P\{\theta^l(k)|\mathbf{Z}^k, \mathbf{m}^k\} = P\{\theta_{i_l}(k), \theta^s(k-1)|\mathbf{Z}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{m}^{k-1}\} \quad (3.45)$$

On utilisant la règle de Bayes, on a

$$\beta^l(k) = \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k)|\theta_{i_l}(k), m_k, \theta^s(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{m}^{k-1}] P\{\theta_{i_l}(k)|m_k, \theta^s(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{m}^{k-1}\} \beta^s(k-1) \quad (3.46)$$

où  $c$  est une constante de normalisation. Les probabilités intervenant dans le calcul de  $\beta^l(k)$  s'expriment

$$p[\mathbf{Z}(k)|\theta_{i_l}(k), m_k, \theta^s(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{m}^{k-1}] = \begin{cases} V_k^{-m_k+1} P_g^{-1} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{i_l}(k); \hat{\mathbf{z}}^s(k|k-1), \mathbf{S}^s(k)), & i_l \neq 0 \\ V_k^{-m_k}, & i_l = 0 \end{cases}$$

$$P\{\theta_{i_l}(k)|m_k, \theta^s(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{m}^{k-1}\} = P\{\theta_{i_l}(k)|m_k\} = \begin{cases} \frac{1}{m_k} P_g P_d \times C, & i_l \neq 0 \\ (1 - P_g P_d) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \times C, & i_l = 0 \end{cases}$$

avec

$$C = \left[ P_g P_d + (1 - P_g P_d) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right]^{-1}$$

### 3.5.3 Inconvénient du FBO

Bien qu'optimal du point de vue théorique, ce filtre reste inexploitable en pratique car le nombre de séquences à gérer croît exponentiellement au cours du temps. La mémoire nécessaire à la mise en œuvre du FBO augmente donc de manière exponentielle au cours du temps.

### 3.5.4 Algorithmes sous-optimaux

D'un point de vue pratique, on est donc amené à envisager des algorithmes sous-optimaux afin de limiter le nombre de séquences à gérer pour avoir une capacité mémoire constante au cours du temps.

Plusieurs méthodes sous-optimales existent. Leur présentation fait l'objet des paragraphes suivants. L'idée consiste soit à éliminer les séquences les moins vraisemblables (approche du **Track Split Filter**), soit à recombler les pistes partageant la même séquence durant les  $N$  coups (scans) précédents. Dans ce cas, le nombre moyen de séquences utilisées est de l'ordre de

$$\bar{N}_h = \prod_{i=k-N}^k (1 + E[m_i])$$

L'algorithme du **PDAF** de Bar-Shalom correspond au cas le plus simple où  $N = 0$ .

## 3.6 Approche bayésienne du PDAF (1975)

On désigne par  $\mathbf{Z}(k)$  l'ensemble des mesures validées à l'instant  $k$  selon le test de validation présenté en 3.1

$$\boxed{\mathbf{Z}(k) \triangleq \{\mathbf{z}(k) \text{ tel que } \tilde{\mathbf{z}}'(k)\mathbf{S}(k)^{-1}\tilde{\mathbf{z}}(k) \leq \gamma\}} \quad (3.47)$$

Soit  $m_k$  le nombre total d'échos validés à l'instant  $k$ . En supposant la cible perceptible par le senseur, il existe alors  $m_k + 1$  hypothèses d'association possibles concernant l'origine des mesures. Ces hypothèses sont caractérisées par les événements

$\theta_0(k)$  : Aucun écho ne provient de la cible à l'instant  $k$

$\theta_i(k)$  : Le  $i$ ème écho provient de la cible à l'instant  $k$

### 3.6.1 Forme de l'estimateur

L'estimateur PDAF classique [BST73, BST75, BSF88] est donné par la moyenne conditionnelle basée sur l'ensemble des mesures validées depuis l'instant initial jusqu'à l'instant  $k$  que l'on note  $\mathbf{Z}^k$ . L'estimateur optimal  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k]$  (au sens de la minimisation de la variance d'erreur d'estimation) s'écrit donc, compte tenu du caractère exclusif et exhaustif des hypothèses :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{i=0}^{m_k} P\{\theta_i(k)|\mathbf{Z}^k\} E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k, \theta_i(k)] = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{\mathbf{x}}_i(k|k)} \quad (3.48)$$

avec  $\beta_i(k) \triangleq P\{\theta_i(k)|\mathbf{Z}^k\}$  et  $\hat{\mathbf{x}}_i(k|k)$  pour  $i \neq 0$  et  $\hat{\mathbf{x}}_0(k|k)$  donnés par

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \tilde{\mathbf{z}}_i(k) \quad (3.49)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (3.50)$$

En utilisant (3.49) et (3.50) dans (3.48), il vient l'équation de mise à jour de l'état et de sa covariance associée [BSF88]

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) \tilde{\mathbf{z}}_i(k) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = \beta_0(k) \mathbf{P}(k|k-1) + (1 - \beta_0(k)) \mathbf{P}^c(k) + \tilde{\mathbf{P}}(k) \quad (3.52)$$

avec

$$\mathbf{P}^c(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (3.53)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{K}(k) \left[ \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) \tilde{\mathbf{z}}_i(k) \tilde{\mathbf{z}}'_i(k) - \tilde{\mathbf{z}}(k) \tilde{\mathbf{z}}'(k) \right] \mathbf{K}'(k) \quad (3.54)$$

et

$$\mathbf{K}(k) \triangleq \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}'(k)\mathbf{S}(k)^{-1} \quad (3.55)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_i(k) \triangleq \mathbf{z}_i(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (3.56)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) \triangleq \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) \tilde{\mathbf{z}}_i(k) \quad (3.57)$$

On montre en [BSF88] que la matrice stochastique  $\tilde{\mathbf{P}}(k)$  est toujours définie semi-positive.

### 3.6.2 Expression des probabilités d'association

Le calcul des probabilités a posteriori d'association  $\beta_i(k) \triangleq P\{\theta_i(k)|\mathbf{Z}^k\}$  ( $i = 0, \dots, m_k$ ) s'obtient en utilisant la règle de Bayes comme suit :

$$\beta_i(k) = \frac{1}{c} p(\mathbf{Z}(k)|\theta_i(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}) P\{\theta_i(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}$$

où  $c$  est une constante de normalisation assurant  $\sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) = 1$ .

En supposant la densité de probabilité de la mesure correcte (provenant de la cible) normale centrée sur la mesure prédite  $\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$  et de covariance  $\mathbf{S}(k)$  et les fausses alarmes indépendantes de la cible et uniformément réparties dans la fenêtre de validation  $V_k$ , on a

$$p(\mathbf{Z}(k)|\theta_i(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}) = \begin{cases} V_k^{-m_k+1} P_g^{-1} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_i(k); 0; \mathbf{S}(k)] & i = 1, \dots, m_k \\ V_k^{-m_k} & i = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Les probabilités a priori d'association  $P\{\theta_i(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}$  sont données par

$$P\{\theta_i(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \begin{cases} \frac{1}{c_1} \frac{P_d P_g}{m_k} & i = 1, \dots, m_k \\ \frac{1}{c_1} \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k-1)} (1 - P_d P_g) & i = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

avec  $c_1 \triangleq P_d P_g + (1 - P_d P_g) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k-1)}$  et où  $\mu_F(\cdot)$  est la masse de probabilité du nombre de fausses mesures validées.  $P_d$  est la probabilité de détection de la cible et  $P_g$  la probabilité de fenêtrage choisie pour le test de validation des mesures.

En pratique deux versions du PDAF ont été proposées par les auteurs selon le modèle choisi pour  $\mu_F(\cdot)$ .

- **Version paramétrique du PDAF :** Si on suppose que  $\mu_F$  est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda V_k$  ( $\lambda$  étant la densité spatiale des fausses alarmes) qui s'exprime

$$\mu_F(m) = \frac{(\lambda V_k)^m}{m!} e^{-\lambda V_k} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.60)$$

alors les probabilités d'associations a priori s'écrivent

$$P\{\theta_i(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \begin{cases} \frac{P_d P_g}{P_d P_g m_k + (1 - P_d P_g) \lambda V_k} & i = 1, \dots, m_k \\ \frac{(1 - P_d P_g) \lambda V_k}{P_d P_g m_k + (1 - P_d P_g) \lambda V_k} & i = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

- **Version non paramétrique du PDAF :** Si on choisit une loi diffuse pour  $\mu_F$ , (c.à.d. telle que  $\mu_F(m) = \mu_F(m-1) = \epsilon$ ) les probabilités d'associations a priori s'écrivent

$$P\{\theta_i(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \begin{cases} \frac{P_d P_g}{m_k} & i = 1, \dots, m_k \\ 1 - P_d P_g & i = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

En remplaçant les expressions de  $p(\mathbf{Z}(k)|\theta_i(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1})$  et de  $P\{\theta_i(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}$  dans (3.6.2), on obtient finalement

$$\beta_0(k) = \frac{b}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j} \quad (3.63)$$

$$\beta_i(k) = \frac{e_i}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j} \quad \text{si } i \neq 0 \quad (3.64)$$

avec

$$e_i = e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}_i^T(k) \mathbf{S}(k)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_i(k)} \quad (3.65)$$

$$b = \begin{cases} (2\pi/\gamma)^{n_z/2} \frac{1}{C_{n_z}} \lambda V_k \frac{(1 - P_d P_g)}{P_d} & \text{version paramétrique} \\ (2\pi/\gamma)^{n_z/2} \frac{1}{C_{n_z}} m_k \frac{(1 - P_d P_g)}{P_d} & \text{version non paramétrique} \end{cases} \quad (3.66)$$

$P_d$  représente la probabilité de détection de la cible et  $\lambda$  la densité spatiale des fausses alarmes dans l'espace des mesures.

La forme équivalente suivante des probabilités peut également être utilisée

$$\beta_0(k) = \frac{b}{b + \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_j} \quad (3.67)$$

$$\beta_i(k) = \frac{e_i}{b + \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_j} \quad \text{si } i \neq 0 \quad (3.68)$$

avec maintenant

$$\alpha_i \triangleq P_g^{-1} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_i(k); 0; \mathbf{S}(k)] \quad (3.69)$$

$$b = \begin{cases} \lambda \frac{(1-P_d P_g)}{P_d} & \text{version paramétrique} \\ \frac{m_k}{V_k} \frac{(1-P_d P_g)}{P_d} & \text{version non paramétrique} \end{cases} \quad (3.70)$$

Une version factorisée du PDAF peut être trouvée en [Pat77, Ken90, RPBS93].

### 3.6.3 Equations de prédiction

Les équations de prédiction du PDAF sont identiques à celles d'un filtre de Kalman standard [SM71, BH92, BSL93] (ou étendu selon le modèle choisi) à savoir

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (3.71)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}'(k) + \mathbf{Q}(k) \quad (3.72)$$

avec éventuellement (si EKF)

$$\mathbf{F}(k) = [\nabla \mathbf{f}'[k, \mathbf{x}(k)]]'_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)}$$

La mise en évidence de la consistance du PDAF peut être trouvée en [BSB83].

### 3.6.4 Filtre PDAF enrichi par la reconnaissance

L'information supplémentaire de reconnaissance des signaux reçus peut (et devrait) être utilisée pour améliorer la qualité de la poursuite. Nous présentons la prise en compte d'une telle information dans le formalisme classique du PDAF.

#### Filtre AIPDAF (1990)

Ce filtre appelé **AIPDAF** (Amplitude Information PDAF) proposé en [LBS90a, LBS93a] utilise l'amplitude du signal, notée  $a(k)$ , ou la surface équivalente rayonnée par un radar - SER - (RCS - Radar Cross Section) associée aux mesures validées. Ces informations supplémentaires sont des **informations de reconnaissance** qui aident à discriminer la mesure correcte des fausses alarmes.

Les mesures élémentaires  $\mathbf{z}(k)$  sont maintenant constituées des mesures traditionnelles augmentées des informations de reconnaissance  $a(k)$  associées, i.e.

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(k) \\ a(k) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

On suppose alors disponibles les densités de probabilité de la mesure de reconnaissance  $a(k)$  conditionnellement à l'identité  $Id$  de son origine (T pour la cible et FA pour les fausses alarmes)

$$p(a(k)|Id) = \begin{cases} p_{FA} & \text{si } Id = FA \\ p_T & \text{si } Id = T \end{cases} \quad (3.74)$$

Dans [LBS90a, LL97], les auteurs supposent que l'amplitude  $a(k)$  de la vraie mesure à l'instant  $k$  est une **variable aléatoire de Rayleigh** dont la densité vaut

$$p(a(k)|Id = T) = \frac{1}{P_d} \frac{a(k)}{1+d} e^{-\frac{a^2(k)}{2(1+d)}} 1(a(k) - t) \quad (3.75)$$

où  $t$  est le seuil du détecteur,  $d$  est le SNR moyen (Signa-to-Noise Ratio) et  $1(\cdot)$  est la fonction échelon unitaire. L'amplitude  $a(k)$  des faux échos suit une autre loi de Rayleigh de type

$$p(a(k)|Id = F) = \frac{1}{P_{fa}} a(k) e^{-\frac{a^2(k)}{2}} 1(a(k) - t) \quad (3.76)$$

où  $P_{fa}$  est la probabilité d'avoir une fausse alarme dans une cellule de résolution du senseur d'observation.

Les équations de l'AIPDAF sont les mêmes que celles du PDAF standard excepté l'expression des probabilités d'association  $\beta_i(k)$  qui compte tenu du fait

$$p(\mathbf{z}_i(k)|\theta_i(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}) = p(a_i(k)|Id = T) P_g^{-1} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_i(k); 0; \mathbf{S}(k)] \quad (3.77)$$

$$p(\mathbf{z}_i(k)|\theta_0(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}) = \frac{1}{V_k} p(a_i(k)|Id = FA) \quad (3.78)$$

s'écrivent dorénavant

$$\beta_0(k) = \frac{b}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j L_j} \quad (3.79)$$

$$\beta_i(k) = \frac{e_i L_i}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j L_j} \quad \text{si } i \neq 0 \quad (3.80)$$

avec  $e_i$  et  $b$  donnés en (3.65) et (3.66) et

$$L_i \triangleq \frac{p(a_i(k)|Id = T)}{p(a_i(k)|Id = FA)} \quad (3.81)$$

Plus la discrimination sera forte (i.e. plus les densités  $p(\cdot|Id = T)$  et  $p(\cdot|Id = FA)$  seront différentes), meilleures seront les performances de l'AIPDAF.

### Filtre PDAF avec classifieur d'échos (1990)

En pratique, l'information de reconnaissance peut soit apparaître sous une information de nature continue (cas de l'amplitude des signaux) comme on vient de le présenter, ou bien plus généralement sous la forme d'une décision issue d'un système de reconnaissance auxiliaire que l'on appelle **classifieur**. Dans ce cas, on suppose que l'on dispose d'une mesure de la qualité du classifieur. Cette approche a été développée initialement en [Dez90, Dez92] pour la navigation autome d'engin. La prise en compte de données de reconnaissance de nature incertaine (i.e. non décrites en terme statistique) basée sur la **théorie de l'évidence** [Sha76] a également été proposée au sein du PDAF en [Dez90]. L'application de cette approche au recalage de centrale inertuelle d'un missile en vol basse altitude est présentée en [Dez99a]. La prise en compte d'informations floues sur les attributs de reconnaissance a été développée

ne [SS98].

Nous présentons ici une application particulière [MD95] de cette approche où l'on cherche à pister une cible particulière (par exemple un bombardier/AWACS) dans un ensemble de cibles de nature différente (escadrille d'avions de chasse) en présence de fausses alarmes.

Les décisions sur la reconnaissance des échos validés sont notées  $\mathbf{D}(k)=\{d_i(k)\}_{j=1}^{m_k}$ . La reconnaissance notée  $d_i(k)$  du  $i$ ème écho validé peut prendre trois valeurs possibles :  $d_i(k)=d_0$  si l'écho est déclaré du type fausse alarme (hypothèse  $h_0$ ),  $d_i(k)=d_1$  si l'écho est déclaré de type objet interférant (hypothèse  $h_1$ ) ou  $d_i(k)=d_2$  si l'écho est déclaré de type cible (hypothèse  $h_2$ ).

La qualité globale du classifieur utilisé est caractérisée par une **matrice de confusion**  $\mathbf{C}=[c_{ij}]$  supposée connue dont les éléments sont donnés par  $c_{ij}=P(d(k)=d_i|h_j)$   $i,j=0,1,2$ . Les décisions  $d_i(k)$  sont supposées indépendantes sachant l'origine de toutes les mesures.

En utilisant la même démarche de développement que celle du PDAF standard, l'estimateur est alors donné par

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k, \mathbf{D}^k] = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) \quad (3.82)$$

avec  $\mathbf{D}^k \triangleq (\mathbf{D}(k), \mathbf{D}^{k-1})$  et  $\hat{\mathbf{x}}_i(k|k)$  donné par (3.49) et (3.50).

Les probabilités  $\beta_i(k) \triangleq P(\theta_i|\mathbf{Z}^k, \mathbf{D}^k)$  sont obtenues par la règle de Bayes

$$\beta_i(k) = \frac{1}{c} P(\mathbf{Z}(k)|\theta_i(k), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{D}^k, m_k) P(\mathbf{D}(k)|\theta_i(k), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{D}^{k-1}, m_k) P(\theta_i(k)|\mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{D}^{k-1}, m_k) \quad (3.83)$$

où  $c$  est une constante de normalisation. Dans le cas où  $i=0$  (la cible est non détectée ou non validée), on a [MD95]

$$P(\theta_0(k)|\mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{D}^{k-1}, m_k) = \frac{P[N_{ofa}=m_k](1-P_dP_g)}{(1-P_dP_g)P[N_{ofa}=m_k] + P_dP_gP[N_{ofa}=m_k-1]} \quad (3.84)$$

où  $N_{ofa} \triangleq N_o + N_{fa}$ , est la somme du nombre d'objets  $N_o$  et de fausses alarmes  $N_{fa}$  validées.  $N_o$  et  $N_{fa}$  étant supposés suivre une loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_o V(k)$  et  $\lambda_{fa} V(k)$ ,  $N_{ofa}$  suivra une loi de Poisson de paramètre  $(\lambda_o + \lambda_{fa})V(k)$ . La  $P_{fa}$  (probabilité de fausse alarme) étant donnée,  $\lambda_{fa}$  est connue ; il nous reste à estimer  $\lambda_o$ . Si l'on admet l'hypothèse que les mesures  $\mathbf{Z}(k)$  sont statistiquement indépendantes des décisions  $\mathbf{D}^k$  et que les objets interférants et fausses alarmes sont uniformément répartis dans  $V(k)$ , on a alors

$$P(\mathbf{Z}(k)|\theta_0(k), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{D}^k, m_k) = V(k)^{-m_k} \quad (3.85)$$

$P(\mathbf{D}(k)|\theta_0(k), \mathbf{Z}^{k-1}, \mathbf{D}^{k-1}, m_k) = P(\mathbf{D}(k)|\theta_0(k), m_k)$  est calculé en considérant toutes les affectations des échos

$$P(\mathbf{D}(k)|\theta_0(k), m_k) = \sum_{n=0}^{m_k} P_1(n) P_2(n) \quad (3.86)$$

avec

$$P_1(n) = P[N_o = n|\theta_0, m_k] = C_{m_k}^n \left( \frac{\lambda_o}{\lambda_{fa}} \right)^n \left( \frac{\lambda_{fa}}{\lambda_{fa} + \lambda_o} \right)^{m_k}$$

En parcourant tous les sous-ensembles  $\Phi$  à  $n$  éléments parmi  $m_k$ , il vient

$$P_2(n) = P(\mathbf{D}(k)|N_o = n, \theta_0, m_k) = \frac{1}{C_{m_k}^n} \sum_{\Phi} \left[ \prod_{i \in \Phi} P(d_i(k)|h_1^i) \prod_{i \in \Phi^c} P(d_i(k)|h_0^i) \right] \quad (3.87)$$

où  $\Phi^c$  est le complémentaire de  $\Phi$ . En remplaçant  $P_1(n)$  et  $P_2(n)$  par leur expression dans (3.86), il vient

$$P(\mathbf{D}(k)|\theta_0, m_k) = \prod_{i=1}^{m_k} \left[ \frac{\lambda_{fa}}{\lambda_o + \lambda_{fa}} P(d_i(k)|h_0^i) + \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_{fa}} P(d_i(k)|h_1^i) \right] \quad (3.88)$$

$P(d_i(k)|h_j^i)$  est l'élément  $c_{ij}$  de la matrice de qualité  $\mathbf{C}$  connue a priori. D'autre part, en notant  $\bar{\theta}_i$  le complémentaire de  $\theta_i$  et en tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} P(h_0^i|m_k, \bar{\theta}_i) &= \frac{1}{m_k} E[N_{fa}|m_k] = \frac{\lambda_{fa}}{\lambda_l + \lambda_{fa}} \\ P(h_1^i|m_k, \bar{\theta}_i) &= \frac{1}{m_k} E[N_o|m_k] = \frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_{fa}} \end{aligned}$$

il vient finalement

$$P(\mathbf{D}(k)|\theta_0, m_k) = \prod_{i=1}^{m_k} P(d_i(k)|\bar{\theta}_i, m_k)$$

Dans le cas  $i \neq 0$ , le calcul des  $\beta_i(k)$  se déroule de façon similaire en introduisant la densité gaussienne tronquée dans  $V(k)$ . L'expression finale des  $\beta_i(k)$  est alors donnée par (3.67) et (3.68) avec  $e_i(k)$  et  $b$  maintenant donnés par

$$e_i = \Lambda_i(k) e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}'_i(k) \mathbf{S}(k)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_i(k)} \quad (3.89)$$

$$b = \left( \frac{2\pi}{\gamma} \right)^{n_z/2} (\lambda_o + \lambda_{fa}) V(k) \frac{(1 - P_d P_g)}{P_d} \quad (3.90)$$

où

$$\Lambda_i(k) \triangleq \frac{P(d_i(k)|\theta_i)}{P(d_i(k)|\bar{\theta}_i)} = \frac{[\lambda_o + \lambda_{fa}] P(d_i|h_2^i)}{\lambda_{fa} P(d_i|h_0^i) + \lambda_o P(d_i|h_1^i)} \quad (3.91)$$

Il reste à estimer la densité spatiale  $\lambda_o$  des objets interférants. Le nombre  $M$  d'échos validés s'écrit  $N_{ofa} + \mathbb{I}$  (cible  $\in V(k)$ ) ( $\mathbb{I}$  désignant la fonction indicatrice qui vaut 0 ou 1) et a pour densité de probabilité

$$P(M=m_k) = \frac{1}{m_k!} [P_d P_g m_k + (1 - P_d P_g)(\lambda_{fa} + \lambda_o)V(k)] ((\lambda_{fa} + \lambda_o)V(k))^{m_k-1} e^{-(\lambda_{fa} + \lambda_o)V(k)} \quad (3.92)$$

La maximisation de (3.92) par rapport à  $\lambda_o$  conduit à l'estimateur du maximum de vraisemblance suivant

$$\hat{\lambda}_o = \sup \left\{ 0, \frac{m_k V(k)(1 - 2P_d P_g) + \sqrt{\Delta}}{2V(k)^2(1 - P_d P_g)} - \lambda_{fa} \right\} \quad (3.93)$$

avec

$$\Delta \triangleq m_k^2 V(k)^2 (1 - 2P_d P_g)^2 + 4m_k(m_k - 1)P_d P_g(1 - P_d P_g)V(k)^2 \quad (3.94)$$

A partir des informations de reconnaissance disponibles, un test de confirmation de piste basé sur le **SPRT** (Sequential Probability Ratio Test) de Wald [Wal47] été proposé en [MD95].

### 3.6.5 Filtre PDAF modifié (1994)

Les travaux récents [Gué94, Gué96, Li98b] ont mis en évidence une légère erreur dans l'évaluation de la matrice de covariance  $\mathbf{P}(k|k)$  lorsque l'évènement  $m_k = 0$  est réalisé. En fait, l'équation de mise à jour du PDAF standard (3.52) doit être modifiée afin de prendre en compte le fait que si  $m_k = 0$  est vrai, il est tout aussi probable que cela soit dû à une erreur sur l'estimation de la position de la cible plutôt qu'à une mesure cible réellement mauvaise. L'équation du PDAF modifié s'écrit quand  $m_k \neq 0$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k) = \beta_0(k)[\mathbf{I} + q_0 \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k|k-1) + (1 - \beta_0(k)) \mathbf{P}^c(k) + \tilde{\mathbf{P}}(k)} \quad (3.95)$$

et quand  $m_k = 0$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} + q_0 \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k|k-1)} \quad (3.96)$$

$q_0$  est un facteur de pondération donné par [Gué96, LL97]

$$\boxed{q_0 \triangleq \frac{P_d(P_g - P_{gg})}{1 - P_d P_g} \equiv \frac{P_d P_g (1 - c_T)}{1 - P_d P_g}} \quad (3.97)$$

où  $P_g$ ,  $P_{gg}$  et  $c_T$  valent

$$P_g \triangleq P\{\chi_{n_z}^2 \leq \gamma\} \quad (3.98)$$

$$P_{gg} \triangleq P\{\chi_{n_z+2}^2 \leq \gamma\} \quad (3.99)$$

$$c_T \triangleq \frac{\Gamma_{\gamma/2}(1 + n_z/2)}{(n_z/2)\Gamma(n_z/2)} \quad (3.100)$$

$c_T$  est le rapport de fonction Gamma incomplète

$$\Gamma_\alpha(x) \triangleq \int_0^\alpha u^{x-1} e^{-u} du \quad (3.101)$$

Note :  $P_{gg}$  ou  $c_T$  sont facilement calculable en MatLab en utilisant les fonctions chi2cdf(.), gammaint(.) et gamma(.). De plus, on a toujours  $q_0 \geq 0$  puisque pour  $P_g < 1$  on a [AS68, Gué96]

$$P_g - P_{gg} = \frac{(\gamma/2)^{n_z/2} e^{-\gamma/2}}{\Gamma(1 + n_z/2)} > 0 \quad (3.102)$$

L'utilisation de cette équation est encore malheureusement trop méconnue.

### 3.6.6 Avantages/inconvénients du PDAF

L'avantage essentiel du PDAF est sa facilité de mise en œuvre et sa faible charge en calculs (à peine supérieure à la charge d'un filtre de Kalman classique), sa prise en compte des fausses alarmes et de la détection non unitaire de la cible.

Ses inconvénients restent la nécessité d'avoir un module spécifique d'initialisation de piste, et une plage limitée de fonctionnement. Il a été montré qu'en général les performances du PDAF se dégradent vite lorsque le nombre moyen d'échos validé est supérieur à 3 (ceci correspond en général à des environnements fortement dégradés). Le développement du PDAF de Bar-Shalom **suppose implicitement la perception de la cible**; c'est à dire l'existence réelle de la cible dans le champ d'observation du senseur. Cette hypothèse peut être supprimée et l'évaluation de la probabilité de perception de la cible peut être en fait intégrée directement au formalisme du PDAF. Ceci conduit à l'**IPDAF** (Integrated PDAF) qui va être présenté dans la section suivante. Les applications du PDAF sont multiples et sont discutées en [BSL95]. L'évaluation des performances de PDAF a priori (sans simulations Monte-Carlo) est discutée en [LBS91c, KE96]. La prise en compte d'une période de mise à jour non constante du PDAF est proposée en [Mar79, BSM80, AHW96]. Une version de filtre PDAF avec lissage a été proposée en [MPG86]. Une extension du PDAF à la prise en compte de scans multiples est discutée en [Dru93a, Dru93b].

### 3.6.7 Un cycle du PDAF

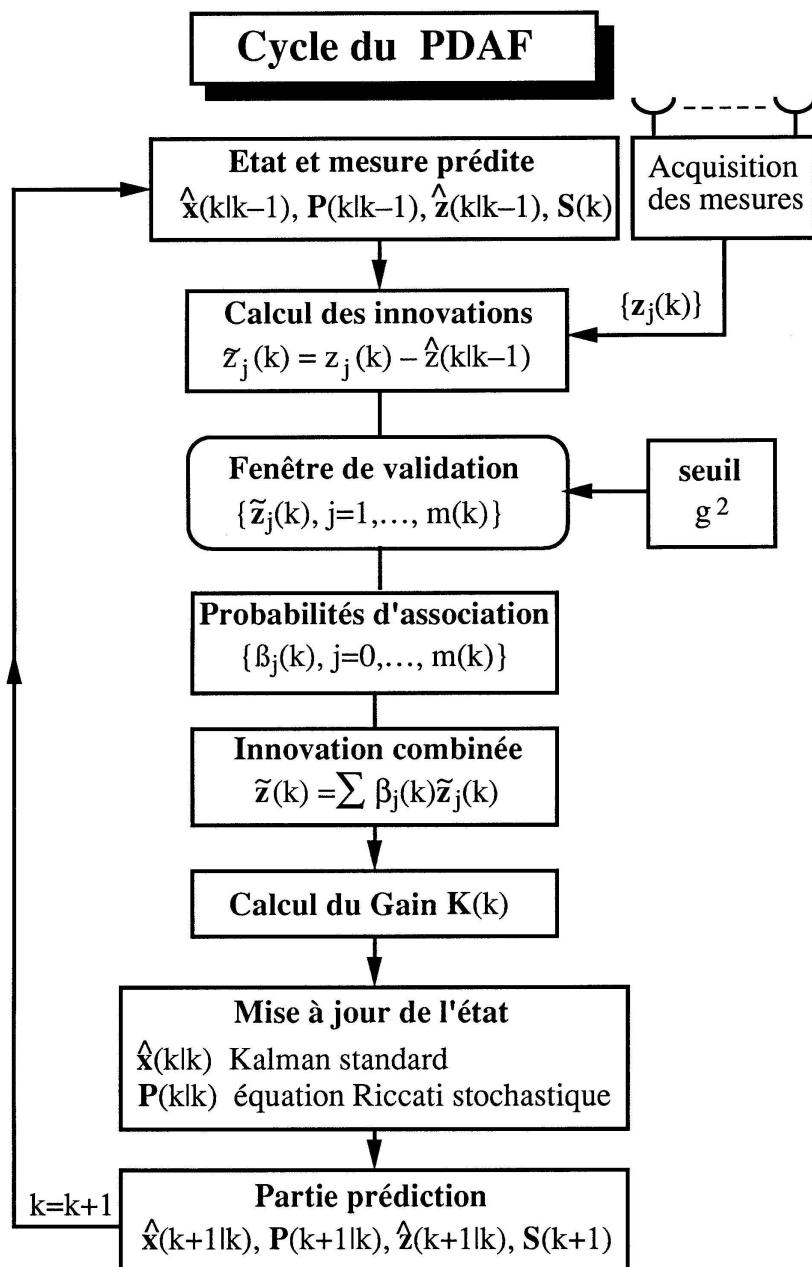


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'un cycle complet du PDAF

### 3.7 Approche bayésienne de l'IPDAF (1985-1998)

Le développement de l'**IPDAF** (Integrated PDAF) a d'abord été donné par Colegrove en [CA85, CDA86, CA87], puis repris par Musicki en [ME92, MES92a, MES94] et Li en [LL97, Li97a]. La présentation ici faite de l'IPDAF est basée sur [JD99b].

#### 3.7.1 Perception de la cible et évènements d'association

A tout instant  $k$ , la perception de la cible et sa non-perception peuvent être représentées par les deux évènements exclusifs et exhaustifs suivants :

$$O_k \triangleq \{\text{la cible est perceptible au temps } k\}$$

$$\bar{O}_k \triangleq \{\text{la cible est imperceptible au temps } k\}$$

Pour simplifier,  $O_k$  désignera dans la suite aussi bien le fait que la cible soit perceptible que l'évènement aléatoire lui-même. Lorsque l'on a des mesures validées à l'instant  $k$ , l'intersection de ces évènements de perception avec les évènements d'association classiquement introduits dans le formalisme du PDAF

$$\theta_i(k) \triangleq \{\mathbf{z}_i(k) \text{ provient de la cible au temps } k\}, \quad i = 1, \dots, m_k$$

$$\theta_0(k) \triangleq \{\text{Aucune des mesures ne provient de la cible au temps } k\}$$

permet de définir le nouvel ensemble d'évènements suivant :

$$\mathcal{E}_{-i}(k) \triangleq \bar{O}_k \cap \theta_i(k) \quad i = 1, \dots, m_k \quad (3.103)$$

$$\mathcal{E}_{\bar{0}}(k) \triangleq \bar{O}_k \cap \theta_0(k) \quad (3.104)$$

$$\mathcal{E}_0(k) \triangleq O_k \cap \theta_0(k) \quad (3.105)$$

$$\mathcal{E}_i(k) \triangleq O_k \cap \theta_i(k) \quad i = 1, \dots, m_k \quad (3.106)$$

Puisque la mesure de la cible ne peut pas avoir lieu sans la perception de celle-ci par le senseur, on peut d'ores et déjà affirmer que les évènements  $\mathcal{E}_{-i}(k), i = 1, \dots, m_k$  sont non réalisables. Par conséquent, on a d'emblée  $\mathcal{E}_{-i}(k) \equiv \emptyset$  et  $P\{\mathcal{E}_{-i}(k)|\mathbf{Z}^k\} = P\{\mathcal{E}_{-i}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\} = P\{\mathcal{E}_{-i}(k)\} = 0$  pour  $i = 1, \dots, m_k$ . Seuls les évènements  $\mathcal{E}_{\bar{0}}(k)$ ,  $\mathcal{E}_0(k)$  et  $\mathcal{E}_i(k)$  ( $i = 1, \dots, m_k$ ) peuvent avoir une probabilité non nulle d'occurrence.

### 3.7.2 Forme de l'estimateur

**Cas 1 :  $m_k \neq 0$**

En utilisant le théorème des probabilités totales, l'estimée de l'état de la cible, minimisant l'erreur quadratique moyenne, s'écrit :

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k] = \hat{\mathbf{x}}_0(k|k) + \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) \quad (3.107)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)|\mathcal{E}_i(k), \mathbf{Z}^k]$  est l'état mis à jour de la cible conditionné par l'évènement  $\mathcal{E}_i(k) = O_k \cap \theta_i(k)$  correspondant au fait que la cible soit **à la fois perceptible et que la  $i$ ème mesure validée soit correcte**.  $\hat{\mathbf{x}}_0(k|k)$  est l'estimée de l'état de la cible conditionné par la réalisation de l'évènement  $\mathcal{E}_0(k) = \bar{O}_k \cap \theta_0(k)$  qui a lieu lorsque la cible est imperceptible et que toutes les mesures proviennent du bruit.  $\beta_i(k) \triangleq P\{\mathcal{E}_i(k)|\mathbf{Z}^k\}$  représentent les probabilités a posteriori d'association intégrées. La terminologie intégrée nous permet de spécifier que la perception de la cible par le senseur de poursuite est prise en compte dans le processus même d'association des données du filtre. Le calcul des nouvelles probabilités  $\beta_i(k)$  pour  $i = \bar{0}, 0, 1 \dots m_k$  va être brièvement explicité au prochain paragraphe.

L'estimée conditionnelle de l'état de la cible pour chacune des hypothèses d'association suit le formalisme classique du filtre PDAF, à savoir (3.49). Le gain  $\mathbf{K}(k)$  est identique à celui calculé par le filtre de Kalman standard car le conditionnement par  $\mathcal{E}_i(k)$  élimine de fait l'incertitude sur l'origine de la mesure.

Pour  $i = \bar{0}$  et  $i = 0$ , si aucune des mesures n'est correcte (peu importe la perception ou non de la cible), les estimées conditionnelles de l'état s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bar{0}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_0(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (3.108)$$

En combinant toutes ces estimées conditionnelles par pondération bayésienne, on obtient finalement l'estimée globale de ce nouveau filtre IPDAF.

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k)$$

où l'innovation combinée  $\tilde{\mathbf{z}}(k)$  est donnée par

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) \triangleq \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i \tilde{\mathbf{z}}_i(k)$$

La matrice de covariance  $\mathbf{P}(k|k)$  associée à l'estimée précédente est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k|k) &\triangleq E[[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]'|\mathbf{Z}^k] \\ &= \sum_{i=\bar{0},0,\dots}^{m_k} \beta_i(k) E[[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]'|\mathbf{Z}^k, \mathcal{E}_i(k)] \\ &= \mathbf{P}^1 + \mathbf{P}^2 + (\mathbf{P}^2)' + \mathbf{P}^3\end{aligned}\tag{3.109}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^1 &= \sum_{i=\bar{0},0,\dots}^{m_k} \beta_i(k) [\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) \hat{\mathbf{x}}'_i(k|k) + \mathbf{P}_i(k|k)] \\ \mathbf{P}^2 &= -\hat{\mathbf{x}}(k|k) \sum_{i=\bar{0},0,\dots}^{m_k} \beta_i(k) E[\mathbf{x}(k)'|\mathbf{Z}^k, \mathcal{E}_i(k)] = -\hat{\mathbf{x}}(k|k) \hat{\mathbf{x}}'(k|k) = (\mathbf{P}^2)' \\ \mathbf{P}^3 &= \hat{\mathbf{x}}(k|k) \hat{\mathbf{x}}'(k|k) \sum_{i=\bar{0},0,\dots}^{m_k} \beta_i(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k) \hat{\mathbf{x}}'(k|k)\end{aligned}$$

Les covariances conditionnelles  $\mathbf{P}_i(k|k)$  pour  $i = 1, \dots, m_k$  sont données par

$$\mathbf{P}_i(k|k) = \mathbf{P}^c(k|k) \triangleq [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1)\tag{3.110}$$

Sous les hypothèses  $\mathcal{E}_0(k)$  et  $\mathcal{E}_{\bar{0}}(k)$ , les matrices  $\mathbf{P}_0(k|k)$  et  $\mathbf{P}_{\bar{0}}(k|k)$  valent respectivement

$$\mathbf{P}_{\bar{0}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1)\tag{3.111}$$

$$\mathbf{P}_0(k|k) = [\mathbf{I} + q_0 \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1)\tag{3.112}$$

où  $q_0$  est le facteur de pondération donné en (3.97).

La relation (3.112) du PDAF modifié confère plus de robustesse au filtre de poursuite devant fonctionner dans des environnements très défavorables (i.e. ayant un taux élevé de fausses alarmes et/ou avec une faible probabilité de détection des cibles).

A partir de l'équation (3.109) et des équations précédentes, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k|k) &= \beta_{\bar{0}}(k)\mathbf{P}(k|k-1) + \beta_0(k)[\mathbf{I} + q_0 \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1) \\ &\quad + (1 - \beta_{\bar{0},0}(k))\mathbf{P}^c(k|k) + \tilde{\mathbf{P}}(k)\end{aligned}\tag{3.113}$$

où la notation  $\beta_{\bar{0},0}(k) \triangleq \text{beta}_{\bar{0}}(k) + \beta_0(k)$  a été utilisée par souci de simplification. La matrice stochastique définie semi-positive  $\tilde{\mathbf{P}}(k)$  est donnée en (3.54).

**Cas 2 :**  $m_k = 0$

Lorsque l'on a aucune mesure validée dans la fenêtre du filtre, c'est à dire  $\mathbf{Z}^k = \{\mathbf{Z}(k) = \emptyset, m_k = 0, \mathbf{Z}^{k-1}\}$ , on a théoriquement, de par le théorème des probabilités totales

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k] = E[\mathbf{x}(k)|m_k = 0, \mathbf{Z}^{k-1}] = P_{k|k-1,0}^O \hat{\mathbf{x}}^O(k|k) + (1 - P_{k|k-1,0}^O) \hat{\mathbf{x}}^{\bar{O}}(k|k) \quad (3.114)$$

avec

$$P_{k|k-1,0}^O = \frac{(1 - P_d P_g) P_{k|k-1}^O}{1 - P_d P_g P_{k|k-1}^O} \quad (3.115)$$

et

$$\hat{\mathbf{x}}^O(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)|O_k, m_k = 0, \mathbf{Z}^{k-1}] \quad (3.116)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{\bar{O}}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)|\bar{O}_k, m_k = 0, \mathbf{Z}^{k-1}] \quad (3.117)$$

En fait, quand on ne dispose **d'aucune mesure** (peu importe la perception ou non de la cible), on doit avoir

$$\hat{\mathbf{x}}^{\bar{O}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^O(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (3.118)$$

Par conséquent,

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (3.119)$$

La covariance  $\mathbf{P}(k|k)$  associée à l'erreur d'estimation du filtre est donnée par

$$\mathbf{P}(k|k) = P_{k|k-1,0}^O \mathbf{P}^O(k|k) + (1 - P_{k|k-1,0}^O) \mathbf{P}^{\bar{O}}(k|k) \quad (3.120)$$

avec

$$\mathbf{P}^O(k|k) = [\mathbf{I} + q_0 \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k|k-1) \quad (3.121)$$

$$\mathbf{P}^{\bar{O}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) \quad (3.122)$$

Finalement, on obtient la matrice de covariance cherchée

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= [\mathbf{I} + q_0 P_{k|k-1,0}^O \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k|k-1) \\ &= [\mathbf{I} + \frac{P_d P_g (1 - c_T) P_{k|k-1}^O}{1 - P_d P_g P_{k|k-1}^O} \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k|k-1) \end{aligned} \quad (3.123)$$

### 3.7.3 Equations de prédiction

La prédiction de l'état de la cible et de sa mesure au temps  $k + 1$  sont obtenues comme à l'étape de prédiction du filtre de Kalman classique. La covariance de l'erreur de prédiction associée est donnée par

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}'(k) + \mathbf{Q}(k)$$

$\mathbf{P}(k|k)$  est donnée par l'équation (3.113) ou (3.123) selon le nombre de mesures validées  $m_k$  à l'instant  $k$ . La covariance de l'innovation  $\mathbf{S}(k)$  est identique à celle du filtre de Kalman standard.

### 3.7.4 Calcul des probabilités d'association intégrées

Nous donnons d'abord l'expression des probabilités d'association intégrées quand  $m_k \neq 0$ . On veut donc évaluer ici

$$\boxed{\beta_i(k) \triangleq P\{\mathcal{E}_i(k)|\mathbf{Z}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}, \quad i = \bar{0}, 0, 1 \dots m_k} \quad (3.124)$$

En utilisant la règle de Bayes, on a

$$\begin{aligned} \beta_i(k) &= \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}_i(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\theta_i(k)|O_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} P\{O_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ \beta_0(k) &= \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}_0(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\theta_0(k)|O_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} P\{O_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ \beta_{\bar{0}}(k) &= \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}_{\bar{0}}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\theta_{\bar{0}}(k)|\bar{O}_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} P\{\bar{O}_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante de normalisation.

– pour  $i = 1 \dots m_k$ , en supposant la distribution de la mesure cible normale autour de la mesure prédite et les fausses mesures indépendantes et uniformément réparties dans  $V_k$ , on a

$$\begin{cases} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}_i(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] = V_k^{-m_k+1} P_g^{-1} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_i(k); 0; \mathbf{S}(k)] \\ P\{\theta_i(k)|O_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{1}{c_1} \frac{P_d P_g}{m_k} \\ P\{O_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \triangleq P_{k|k-1, m_k}^O \end{cases} \quad (3.125)$$

où  $c_1$  vaut

$$c_1 \triangleq P_d P_g + (1 - P_d P_g) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \quad (3.126)$$

– pour  $i = 0$ , on a

$$\begin{cases} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}_0(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] = V_k^{-m_k} \\ P\{\theta_0(k)|O_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{1}{c_1} \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} (1 - P_d P_g) \\ P\{O_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \triangleq P_{k|k-1, m_k}^O \end{cases} \quad (3.127)$$

– pour  $i = \bar{0}$ , on a

$$\begin{cases} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}_{\bar{0}}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] &= V_k^{-m_k} \\ P\{\theta_0(k)|\bar{O}_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} &= 1 \\ P\{\bar{O}_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} &= 1 - P_{k|k-1,m_k}^O \end{cases} \quad (3.128)$$

La probabilité prédictive de la perception de la cible  $P_{k|k-1,m_k}^O$  conditionnellement à  $m_k$  est donnée au paragraphe suivant. En combinant les équations précédentes, il vient finalement l'expression finale des probabilités d'association intégrées cherchée

$$\beta_i(k) = \frac{1}{c} \alpha_i(k) P_{k|k-1,m_k}^O \quad (3.129)$$

$$\beta_0(k) = \frac{1}{c} b_0(k) P_{k|k-1,m_k}^O \quad (3.130)$$

$$\beta_{\bar{0}}(k) = \frac{1}{c} b_{\bar{0}}(k) (1 - P_{k|k-1,m_k}^O) \quad (3.131)$$

La constante de normalisation  $c$  est donnée par

$$c = b_{\bar{0}}(k)(1 - P_{k|k-1,m_k}^O) + b_0(k)P_{k|k-1,m_k}^O + P_{k|k-1,m_k}^O \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_j(k) \quad (3.132)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_i(k) \triangleq P_g^{-1} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_i(k); 0; \mathbf{S}(k)] \\ b_0(k) \triangleq \frac{m_k}{V_k} \frac{1 - P_d P_g}{P_d P_g} \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \\ b_{\bar{0}}(k) \triangleq \frac{m_k}{V_k} \frac{1}{P_d P_g} \left[ P_d P_g + (1 - P_d P_g) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right] \end{cases}$$

### 3.7.5 Remarques

- On peut facilement vérifier que ces nouvelles expressions restent parfaitement cohérentes avec celles du PDAF de Bar-Shalom qui supposait implicitement la totale perception de la cible. En effet, si l'on fixe  $P_{k|k-1,m_k}^O = 1$  dans les expressions précédentes on retrouve bien l'expression originelle des  $\beta_i(k)$  pour  $i = 0, \dots, m_k$  ( $\beta_{\bar{0}}(k)$  étant nulle dès lors que  $P_{k|k-1,m_k}^O = 1$ )
- En adoptant la même démarche que dans les travaux antérieurs [LBS90a, Dez92, LL97] la prise en compte d'une information de reconnaissance/classification et/ou d'amplitude peut être facilement intégrée à ce nouveau filtre IPDAF. Il suffit, pour cela, de remplacer les termes  $e_i(k)$  par les termes  $\alpha_i(k)L_i(k)$  dans les expressions des probabilités d'association intégrées.  $L_i(k)$  désigne le rapport de la densité de probabilité de l'amplitude du signal cible (ou tout autre type d'information statistique lié à la reconnaissance de la cible) au signal des fausses alarmes. Nous renvoyons le lecteur aux références précitées pour de plus amples détails.

- Les probabilités  $\beta_0(k)$  et  $\beta_{\bar{0}}(k)$  peuvent être additionnées par souci de simplification de notation.

On aura

$$\beta_{0,\bar{0}}(k) \triangleq P\{\mathcal{E}_0(k)|\mathbf{Z}^k\} + P\{\mathcal{E}_{\bar{0}}(k)|\mathbf{Z}^k\} \equiv P\{\theta_0(k)|\mathbf{Z}^k\} = \frac{1}{c} b_{0,\bar{0}}(k)$$

avec

$$c = b_{0,\bar{0}}(k) + P_{k|k-1,m_k}^0 \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_j(k)$$

et

$$\begin{aligned} b_{0,\bar{0}}(k) &\triangleq b_{\bar{0}}(k)(1 - P_{k|k-1,m_k}^0) + b_0(k)P_{k|k-1,m_k}^0 \\ &= \frac{m_k}{V_k} \frac{1}{P_d P_g} \left[ (1 - P_{k|k-1,m_k}^0) P_d P_g + (1 - P_d P_g) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right] \end{aligned}$$

- Si on suppose une loi a priori diffuse pour la distribution du nombre de fausses mesures  $\mu_F$  (i.e.  $\mu_F(m_k) = \mu_F(m_k - 1)$ ), on obtient

$$b_{0,\bar{0}}(k) = \frac{m_k}{V_k} \frac{1}{P_d P_g} [1 - P_{k|k-1,m_k}^0 P_d P_g]$$

- Si on suppose une distribution de Poisson pour  $\mu_F$  avec comme paramètre  $\lambda V_k$ , on obtient

$$b_{0,\bar{0}}(k) = \frac{1}{V_k} \frac{1}{P_d P_g} [m_k P_d P_g (1 - P_{k|k-1,m_k}^0) + (1 - P_d P_g) \lambda V_k]$$

- Comme en général la vraie densité  $\lambda$  du *clutter* reste inconnue, on doit l'estimer en ligne à chaque pas du filtre. Souvent l'estimateur  $\hat{\lambda}_k = m_k/V_k$  est utilisé. Mais l'estimateur suivant

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 0 & m_k = 0 \\ \frac{m_k}{V_k} - \frac{1}{V_k} P_d P_g P_{k|k-1,m_k}^0 & m_k \neq 0 \end{cases} \quad (3.133)$$

semble beaucoup plus judicieux du point de vue théorique. Cependant puisque  $P_{k|k-1,m_k}^0$  est elle-même une fonction de la densité inconnue  $\lambda$  comme nous le montrerons, cet estimateur ne peut pas être utilisé directement sous la forme précédente. En fait, on devra prendre pour estimation de  $\lambda$  la solution positive de l'équation du second degré suivante :

$$\hat{\lambda}_k - \frac{1}{V_k} [m_k - P_d P_g P_{k|k-1,m_k}^0 (\hat{\lambda}_k)] = 0 \quad (3.134)$$

D'autres estimateurs plus sophistiqués [LL98c] basés sur le maximum de vraisemblance, les moindres carrés ou la méthode des moments peuvent aussi être choisis.

### 3.7.6 Calcul de $P_{k|k-1,m_k}^O$

Le calcul complet des probabilités d'association intégrées nécessite l'évaluation de la probabilité de perception conditionnelle prédictive de la cible  $P_{k|k-1,m_k}^O$ . Son calcul s'obtient simplement en utilisant la règle de Bayes. En effet, on a

$$\begin{aligned} P_{k|k-1,m_k}^O &= P\{O_k|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= \frac{P\{m_k|O_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}P_{k|k-1}^O}{P\{m_k|O_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}P_{k|k-1}^O + P\{m_k|\bar{O}_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}(1 - P_{k|k-1}^O)} \end{aligned} \quad (3.135)$$

avec

$$\begin{cases} P_{k|k-1}^O \triangleq P\{O_k|\mathbf{Z}^{k-1}\} \\ P_{k|k-1}^{\bar{O}} \triangleq P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^{k-1}\} = 1 - P_{k|k-1}^O \end{cases} \quad (3.136)$$

et où  $P\{m_k|O_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}$  et  $P\{m_k|\bar{O}_k, \mathbf{Z}^{k-1}\}$  sont données par

$$\begin{aligned} P\{m_k|O_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} &= \begin{cases} (1 - P_d P_g) \mu_F(0) & m_k = 0 \\ P_d P_g \mu_F(m_k) + (1 - P_d P_g) \mu_F(m_k - 1) & m_k \neq 0 \end{cases} \\ P\{m_k|\bar{O}_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} &= \begin{cases} \mu_F(0) & m_k = 0 \\ \mu_F(m_k) & m_k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (3.135), on obtient

– pour  $m_k = 0$ ,

$$P_{k|k-1,m_k}^O = \frac{(1 - P_d P_g) P_{k|k-1}^O}{1 - P_d P_g P_{k|k-1}^O}$$

– pour  $m_k \neq 0$  et avec une loi diffuse pour  $\mu_F$ , on a

$$P_{k|k-1,m_k}^O = P_{k|k-1}^O$$

– pour  $m_k \neq 0$  et avec une loi de Poisson pour  $\mu_F$ , on a

$$P_{k|k-1,m_k}^O = \frac{[1 - P_d P_g(1 - \frac{m_k}{\lambda V_k})] P_{k|k-1}^O}{1 - P_d P_g(1 - \frac{m_k}{\lambda V_k}) P_{k|k-1}^O}$$

On obtient finalement la forme concise suivante [LL98c],

$$P_{k|k-1,m_k}^O = \frac{(1 - \epsilon_k) P_{k|k-1}^O}{1 - \epsilon_k P_{k|k-1}^O}$$

(3.137)

avec

$$\epsilon_k \triangleq \begin{cases} P_d P_g & m_k = 0 \\ P_d P_g(1 - \frac{m_k}{\lambda V_k}) & m_k \neq 0 \end{cases} \quad (3.138)$$

La probabilité de perception prédictive non conditionnelle  $P_{k|k-1}^O$  doit donc maintenant être évaluée pour achever le calcul de  $P_{k|k-1,m_k}^O$ .

### Calcul de la probabilité de perception prédictive

En utilisant la règle de Bayes, on a

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^O &\triangleq P\{O_k | \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= \underbrace{P\{O_k | O_{k-1}, \mathbf{Z}^{k-1}\}}_{\pi_{11}} P\{O_{k-1} | \mathbf{Z}^{k-1}\} + \underbrace{P\{O_k | \bar{O}_{k-1}, \mathbf{Z}^{k-1}\}}_{\pi_{21}} P\{\bar{O}_{k-1} | \mathbf{Z}^{k-1}\} \end{aligned}$$

Avec la notation  $P_{k-1|k-1}^O \triangleq P\{O_{k-1} | \mathbf{Z}^{k-1}\}$  et  $P_{k-1|k-1}^{\bar{O}} \triangleq P\{\bar{O}_{k-1} | \mathbf{Z}^{k-1}\} = 1 - P_{k-1|k-1}^O$ , on écrit

$$\boxed{P_{k|k-1}^O = \pi_{11} P_{k-1|k-1}^O + \pi_{21} (1 - P_{k-1|k-1}^O)} \quad (3.139)$$

Au temps  $k$ , la probabilité (inconditionnelle) de perception mise à jour  $P_{k|k}^O \triangleq P\{O_k | \mathbf{Z}^k\}$  est donnée par

$$P_{k|k}^O = \frac{P_1(1 - \epsilon_k)P_{k|k-1}^O}{P_1(1 - \epsilon_k)P_{k|k-1}^O + P_2(1 - P_{k|k-1}^O)} \quad (3.140)$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 &\triangleq P\{\mathbf{Z}(k) | O_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ P_2 &\triangleq P\{\mathbf{Z}(k) | \bar{O}_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \end{aligned}$$

On peut facilement montrer qu'avec une loi de Poisson pour  $\mu_F$ , on obtient

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{cases} P\{\mathbf{Z}(k) = \emptyset | O_k, m_k = 0, \mathbf{Z}^{k-1}\} = 1 & m_k = 0 \\ \sum_{i=0}^{m_k} P\{\theta_i, \mathbf{Z}(k) | O_k, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{V_k^{-m_k+1}}{c_2} [(1 - P_d P_g) \lambda + P_d P_g \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i] & m_k \neq 0 \end{cases} \\ P_2 &= \begin{cases} P\{\mathbf{Z}(k) = \emptyset | \bar{O}_k, m_k = 0, \mathbf{Z}^{k-1}\} = 1 & m_k = 0 \\ V_k^{-m_k} & m_k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où la constante  $c_2$  est définie comme

$$\boxed{c_2 \triangleq P_d P_g m_k + (1 - P_d P_g) \lambda V_k = (1 - \epsilon_k) \lambda V_k} \quad (3.141)$$

Après substitution de  $P_1$  et  $P_2$  dans (3.140), on obtient

$$\boxed{P_{k|k}^O = \frac{(1 - \phi_k)P_{k|k-1}^O}{1 - \phi_k P_{k|k-1}^O}} \quad (3.142)$$

avec

$$\phi_k \triangleq \begin{cases} P_d P_g & m_k = 0 \\ P_d P_g (1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i) & m_k \neq 0 \end{cases} \quad (3.143)$$

On voit donc que les probabilités de perception de la cible  $P_{k|k-1}^O$  et  $P_{k|k}^O$  peuvent être évaluées en ligne récursivement grâce aux relations (3.139) et (3.142) dès lors que les paramètres de réglages  $\pi_{11}$ ,  $\pi_{21}$  et  $P_{1|0}^O$  sont fixés.

Les premières investigations théoriques sur l'optimisation de ces paramètres de réglage pour l'amélioration de la perception des cibles peuvent être trouvées en [LL98b]. Dans leurs travaux, les auteurs supposent que la perception  $\{O_k\}$  d'une cible à chaque instant suit un processus de **Markov homogène d'ordre 1**; c'est à dire

$$\pi_{11} \triangleq P\{O_k|O_{k-1}, \mathbf{Z}^{k-1}\} \approx P\{O_k|O_{k-1}\} \quad (3.144)$$

$$\pi_{21} \triangleq P\{\bar{O}_k|\bar{O}_{k-1}, \mathbf{Z}^{k-1}\} \approx P\{O_k|\bar{O}_{k-1}\} \quad (3.145)$$

### 3.7.7 Commentaires sur le calcul des $\beta_i$

D'après le théorème des probabilités totales, on a

$$P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^k\} + P\{O_k|\mathbf{Z}^k\} = 1 \quad (3.146)$$

En introduisant tous les événements d'association  $\theta_i(k)$ ,  $i = 0, \dots, m_k$ , il vient

$$\sum_{i=0}^{m_k} P\{\bar{O}_k, \theta_i(k)|\mathbf{Z}^k\} + \sum_{i=0}^{m_k} P\{O_k, \theta_i(k)|\mathbf{Z}^k\} = 1$$

soit encore

$$\sum_{i=0}^{m_k} P\{\mathcal{E}_{-i}(k)|\mathbf{Z}^k\} + \sum_{i=0}^{m_k} P\{\mathcal{E}_i(k)|\mathbf{Z}^k\} = 1$$

Comme les événements  $\mathcal{E}_{-i}(k)$  ont une probabilité nulle d'occurrence, il nous reste donc

$$P\{\mathcal{E}_{\bar{0}}(k)|\mathbf{Z}^k\} + P\{\mathcal{E}_0(k)|\mathbf{Z}^k\} + \sum_{i=1}^{m_k} P\{\mathcal{E}_i(k)|\mathbf{Z}^k\} = 1$$

ou de façon équivalente

$$\beta_{\bar{0}}(k) + \beta_0(k) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) = 1$$

Nous prouvons ici que les expressions des  $\beta_i(k)$  précédentes restent cohérentes avec l'équation (3.146).

En d'autres termes, on montre que l'on a bien

$$P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^k\} = \beta_{\bar{0}}(k) = P\{\bar{O}_k, \theta_0(k)|\mathbf{Z}^k\} \quad (3.147)$$

$$P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^k\} = \beta_0(k) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) \quad (3.148)$$

La 1ère relation (3.147) est immédiate. En effet, puisque  $P\{\theta_0(k)|\bar{O}_k, \mathbf{Z}^k\} \equiv 1$  et d'après la règle de Bayes, il vient

$$\boxed{\beta_{\bar{0}}(k) = P\{\bar{O}_k, \theta_0(k)|\mathbf{Z}^k\} = P\{\theta_0(k)|\bar{O}_k, \mathbf{Z}^k\}P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^k\} \equiv P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^k\}} \quad (3.149)$$

La seconde relation (3.148) nécessite un peu d'algèbre. A partir des relations (3.137), (3.125),(3.127) et (3.128), on obtient pour  $\beta_{\bar{0}}(k), \beta_0(k)$  et  $\beta_i(k)$  (avec  $\mu_F$  de type Poisson)

$$\beta_i(k) = \frac{1}{(1 - \epsilon_k P_{k|k-1}^0)c/V_k^{-m_k}} \times \frac{1}{c_1} \frac{P_d P_g}{m_k} V_k (1 - \epsilon_k) P_{k|k-1}^0 \alpha_i(k) \quad (3.150)$$

$$\beta_0(k) = \frac{1}{(1 - \epsilon_k P_{k|k-1}^0)c/V_k^{-m_k}} \times \frac{1}{c_1} \frac{\lambda V_k}{m_k} (1 - P_d P_g) (1 - \epsilon_k) P_{k|k-1}^0 \quad (3.151)$$

$$\beta_{\bar{0}}(k) = \frac{1}{(1 - \epsilon_k P_{k|k-1}^0)c/V_k^{-m_k}} \times 1 - P_{k|k-1}^0 \quad (3.152)$$

En utilisant le fait que,

$$(1 - \phi_k) P_{k|k-1}^0 = \frac{1}{c_1} \frac{\lambda V_k}{m_k} (1 - P_d P_g) (1 - \epsilon_k) P_{k|k-1}^0 + \frac{1}{c_1} \frac{P_d P_g}{m_k} V_k (1 - \epsilon_k) P_{k|k-1}^0 \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i(k) \quad (3.153)$$

on peut facilement vérifier que la constante de normalisation  $c$  peut en fait s'exprimer comme

$$c = V^{-m_k} \frac{1 - \phi_k P_{k|k-1}^0}{1 - \epsilon_k P_{k|k-1}^0} \quad (3.154)$$

Le terme intervenant au dénominateur des relations (3.150),(3.151) et (3.152) s'exprime donc comme

$$c \times \frac{1 - \epsilon_k P_{k|k-1}^0}{V_k^{-m_k}} = 1 - \phi_k P_{k|k-1}^0 \quad (3.155)$$

Par conséquent, en utilisant (3.153) et (3.155) nous obtenons

$$\boxed{\beta_0(k) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) = \frac{(1 - \phi_k) P_{k|k-1}^0}{1 - \phi_k P_{k|k-1}^0} \equiv P\{O_k|\mathbf{Z}^k\} = P_{k|k}^0} \quad (3.156)$$

Ce qui démontre la validité de la relation (3.148).

De plus, on peut facilement vérifier à partir des relations (3.150) et (3.154), que l'on a

$$\boxed{\beta_{\bar{0}}(k) = \frac{1 - P_{k|k-1}^0}{1 - \phi_k P_{k|k-1}^0} = 1 - P_{k|k}^0 = P_{k|k}^{\bar{0}} = P\{\bar{O}_k|\mathbf{Z}^k\}} \quad (3.157)$$

## 3.8 Filtre non-bayésien TSF (1975)

Cette approche [SB75a] peut être utilisée juste après la phase d'initialisation d'une piste. L'idée consiste à séparer la piste (**Track Split Filter - TSF**) à l'instant  $k = 1$  en autant de branches qu'il y a de mesures validées à  $k = 1$  dans la fenêtre centrée autour de la mesure prédictive  $\tilde{\mathbf{z}}(1|0)$ . **Pour chaque branche**, on met en œuvre un filtre de Kalman classique, puis on prédit l'état de la cible à l'instant  $k = 2$  et on réitére cette procédure aux instants suivants. Pour limiter le nombre exponentiellement croissant de branches, on évalue la vraisemblance de chaque branche et on élimine les branches les moins vraisemblables. On considère que la branche (la séquence de mesures) la plus vraisemblable correspond à la piste de la cible. Dans cette approche on suppose que **la probabilité de détection de la cible est unitaire** ( $P_d = 1$ ).

### 3.8.1 Vraisemblance d'une séquence

Une séquence (branche) possible est notée (comme pour le FBO)  $\mathbf{Z}^{k,l}$ . On note  $\theta^l(k)$  l'évènement suivant :

$$\theta^l(k) \triangleq \{\mathbf{Z}^{k,l} \text{ est la piste correcte}\} \quad (3.158)$$

La fonction de vraisemblance de  $\theta^l(k)$  s'écrit :

$$\Lambda(\theta^l(k)) = p[\mathbf{Z}^{k,l} | \theta^l(k)] = \prod_{j=1}^k p[\mathbf{z}_{i_l}(j) | \mathbf{Z}^{j-1}, \theta^l(k)] \quad (3.159)$$

où  $\mathbf{Z}^{j-1}$  représente l'ensemble de toutes les mesures disponibles jusqu'à l'instant  $j-1$ . Sous les hypothèses de modèle linéaire/gaussien, c.à.d.

$$p[\mathbf{z}_{i_l}(j) | \mathbf{Z}^{j-1}, \theta^l(k)] = \mathcal{N}(\mathbf{z}_{i_l}(k); \hat{\mathbf{z}}_{i_l}(j|j-1), \mathbf{S}_{i_l}(j)) = \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{z}}_{i_l}(j); 0, \mathbf{S}_{i_l}(j)) \quad (3.160)$$

la vraisemblance  $\Lambda(\theta^l(k))$  s'écrit

$$\Lambda(\theta^l(k)) = \left[ \prod_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{|2\pi \mathbf{S}_{i_l}(j)|}} \right] e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{z}}'_{i_l}(j) \mathbf{S}_{i_l}(j) \tilde{\mathbf{z}}_{i_l}(j)} \quad (3.161)$$

Généralement, on préfère utiliser le logarithme de la vraisemblance modifiée défini comme

$$\lambda^l(k) \triangleq -2 \log \left[ \Lambda(\theta^l(k)) \prod_{j=1}^k \sqrt{|2\pi \mathbf{S}_{i_l}(j)|} \right] = \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{z}}'_{i_l}(j) \mathbf{S}_{i_l}(j) \tilde{\mathbf{z}}_{i_l}(j) = \sum_{j=1}^k \epsilon_{\mathbf{z}_{i_l}}(j) \quad (3.162)$$

$\lambda^l(k)$  peut alors s'exprimer récursivement sous la forme

$$\lambda^l(k) = \lambda^l(k-1) + \tilde{\mathbf{z}}'_{i_l}(k) \mathbf{S}_{i_l}(k) \tilde{\mathbf{z}}_{i_l}(k) \quad (3.163)$$

Puisque sous les hypothèses de modèle linéaire/gaussien,  $\epsilon_{\mathbf{z}_{i_l}}$  est une variable du  $\chi^2_{n_z}$  (cf 3.1), la quantité  $\lambda^l(k)$  est une variable aléatoire qui doit suivre un  $\chi^2_{kn_z}$  lorsque  $\theta^l(k)$  est vraie.

### 3.8.2 Test de confirmation/élimination de branches

L'élimination ou l'acceptation d'une branche  $\mathbf{Z}^{k,l}$  est basée sur le test statistique suivant [Leh83] :

$$\begin{cases} \lambda^l(k) \leq a & \text{accepter la séquence } \mathbf{Z}^{k,l} \\ \lambda^l(k) > a & \text{rejeter la séquence } \mathbf{Z}^{k,l} \end{cases} \quad (3.164)$$

où  $a$  est le seuil d'acceptation du test que l'on calcule à partir des tables de la loi du  $\chi^2_{kn_z}$  [AS68, Spi81] en se fixant la probabilité d'erreur de décision  $\alpha$  suivante

$$P\{\chi^2_{kn_z} > a\} = \alpha \quad (3.165)$$

Généralement, on prend  $\alpha = 0.01$ .

### 3.8.3 Avantages et inconvénients du TSF

Le seul avantage du TSF est sa simplicité au niveau de la mise à jour de chaque branche puisqu'elle nécessite uniquement un filtre de Kalman classique. Ses principaux inconvénients sont les suivants :

- il ne prend pas en compte les cas où  $P_d < 1$ . On peut cependant l'étendre en prenant des séquences incomplètes et en utilisant des heuristiques de décision du type "conserver la séquence si l'on a au moins  $m$  détections pendant  $n$  scans" et si la vraisemblance  $\lambda^l(k)$  est encore acceptable.
- il ne fournit pas la probabilité pour que la séquence soit correcte (on a à faire à une méthode non bayésienne),
- en pratique, il faut soit utiliser des séquences de mesures de taille limitée ou bien utiliser un facteur d'oubli pour pondérer les mesures les plus anciennes de la séquence afin d'avoir une bonne sensibilité (temps de réponse) du test (3.164),
- il ne peut être implanté sur calculateur qu'avec des heuristiques de gestion des branches difficiles à mettre au point. La capacité mémoire nécessaire au TSF est souvent prohibitive,
- il ne prend pas en compte le fait qu'une mesure peut provenir d'autres cibles (la vraisemblance est évaluée de manière margignale dans le TSF contrairement au MHT).
- il peut théoriquement être utilisé en environnement multi-cibles où le nombre de cibles est inconnu ; cependant les performances du TSF restent relativement médiocres.

## Chapitre 4

# Pistage multi-cibles mono-senseur par approches bayésiennes

Dans les problèmes de pistage de cibles multiples, la solution la plus simple envisageable consisterait à utiliser en parallèle les filtres de poursuite mono-cible décrits au chapitre précédent. Cette solution s'avère en fait satisfaisante uniquement lorsque les cibles sont très éloignées les unes des autres et donc bien séparables dans l'espace d'observation du senseur. De telles conditions, exceptionnellement favorables pour le pistage, sont rarement rencontrées en pratique. Ainsi tous les problèmes de surveillance et contrôle du traffic aérien (Air Traffic Control (ATC) problem) ou de surveillance de champ de bataille par exemple, ne peuvent ils malheureusement pas être résolus efficacement par ce type d'approche simpliste.

La difficulté essentielle du pistage multi-cibles provient à la fois de l'incertitude sur l'origine des mesures (et donc de la combinatoire inhérente au problème) et de la capacité de manœuvre des cibles à pister. Dans le cas de cibles multiples proches, les mesures non issues d'une cible pistée ne se comportent pas toutes comme de simples fausses alarmes car certaines peuvent provenir de cibles proches interférentes. On doit donc au sein même du processus de filtrage de chaque cible chercher à prendre théoriquement en compte à la fois les hypothèses possibles d'associations conjointes des mesures avec les cibles environnantes et la perception ou non des cibles par le senseur d'observation.

Ce chapitre et le suivant sont consacrés au cas du **pistage mono-senseur de cibles non manœuvrantes**. La poursuite des cibles manœuvrantes fera l'objet d'un chapitre particulier. Nous présentons ici les principaux algorithmes développés pour résoudre le problème ainsi que leurs avantages, inconvénients et limitations. Nous décrivons d'abord l'étape dite de regroupement (**clustering**) des cibles interférentes indispensable avant la mise en œuvre des méthodes de poursuite multi-cibles.

Ce chapitre décrit les 3 principales approches **bayésiennes** développées pour la poursuite multi-cibles : le JPDAF, le MHT et le PMHT. Dans ces méthodes, aucune décision ferme d'assignation mesure↔cible n'est prise. L'idée de ces méthodes consiste essentiellement à évaluer d'abord les probabilités d'association mesure↔cible et à effectuer l'estimation des états des cibles par une **pondération probabiliste** des hypothèses d'associations possibles. On parle parfois de méthodes de décision douce **soft decision logic** à l'opposé des méthodes de décision dure (**hard decision logic**) présentées au chapitre suivant.

## 4.1 Séparation et regroupement des cibles

Afin de diminuer la combinatoire du problème d'association mesures↔cibles, il est indispensable à chaque instant  $k$  d'effectuer avant toute chose un prétraitement de **séparation et/ou de regroupement des cibles** (appelé *clustering* dans la littérature anglo-saxonne) qui a pour but de discriminer l'espace de toutes les mesures validées  $\mathbf{Z}(k)$  pour toutes les cibles en sous-ensembles disjoints qui pourront être traités en parallèle par des algorithmes de pistage appropriés.

Une cible  $t$  est dite **isolée**, lorsqu'aucune des mesures validées associées (contenues dans la fenêtre de validation de la cible)  $\mathbf{Z}^t(k) \in \mathbf{Z}(k)$  n'appartient à une fenêtre de validation d'une autre cible. Chaque cible isolée doit alors être pistée par un algorithme classique de pistage mono-cible.

En général, dans les environnements denses en cibles et FA, certaines mesures peuvent appartenir à l'intersection de plusieurs fenêtres de validation prédites. Les cibles associées à ces fenêtres sont alors interférentes et doivent être traitées conjointement par la méthode de pistage. On ne peut alors utiliser en parallèle les techniques classiques de pistage mono-cible. Lorsque  $M$  cibles partagent au moins une mesure, on dira que ces  $M$  cibles constituent un groupe ou **cluster** de taille  $M$ .

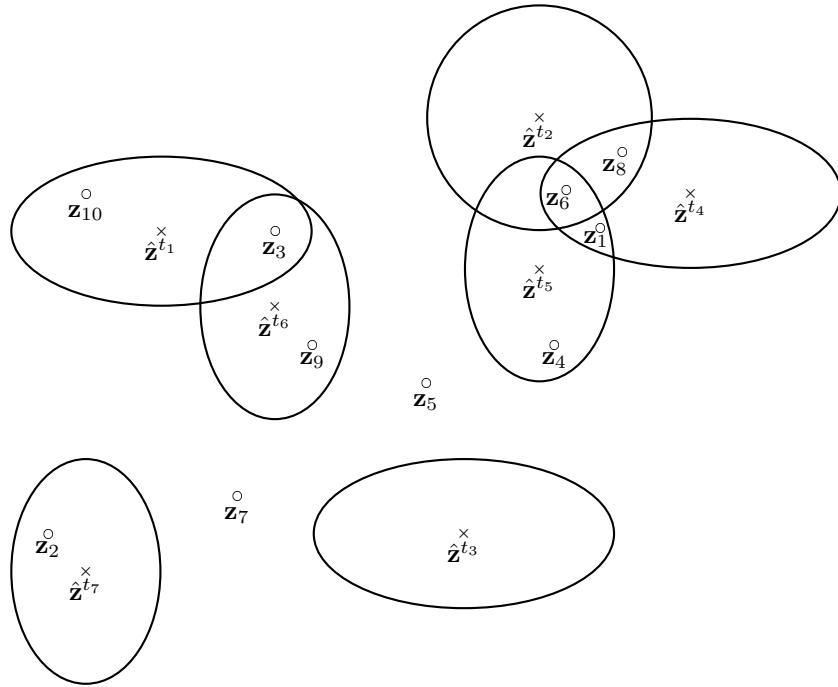
L'étape de **clustering** (regroupement) consiste donc à examiner le contenu de chacune des fenêtres de validation afin de détecter ou non la présence de mesures communes à plusieurs fenêtres. On constitue ainsi une liste de fenêtres (cibles) isolées et une liste de clusters de tailles différentes. Les cibles isolées seront ensuite pistées par des algorithmes de pistage mono-cible tandis que chaque cluster sera traité par une des méthodes de pistage multi-cibles que l'on va présenter dans ce chapitre.

### 4.1.1 Exemple

Considérons le cas d'une poursuite de 7 cibles évoluant dans le plan. A l'instant  $k$  on dispose de  $m_k = 10$  mesures. La validation des 10 mesures  $\mathbf{Z}(k) = \{\mathbf{z}_1(k), \dots, \mathbf{z}_{10}(k)\}$  correspond à la figure suivante. Les centres des fenêtres (ellipses) de validation  $\{\hat{\mathbf{z}}^{t_1}, \dots, \hat{\mathbf{z}}^{t_7}\}$  correspondent aux positions prédites

des 7 cibles.

Dans cet exemple, les mesures  $\mathbf{z}_5(k)$  et  $\mathbf{z}_7(k)$  ne sont pas validées ; les cibles no 3 et 7 sont isolées ; les cibles no 1 et no 6 forment un cluster de taille 2 ; les cibles no 2, no 4 et no 5 forment un cluster de taille 3.



#### 4.1.2 Matrice de validation utile

Pour effectuer **automatiquement** la séparation et le clustering des cibles, nous devons d'abord construire la matrice de *validation initiale* du pistage, puis la *matrice de validation utile*. Une routine de séparation et de *clustering* est donnée au paragraphe suivant.

La **matrice de validation initiale**, notée  $\Omega_I$  est une matrice de taille  $m_k \times T$  dont les éléments binaires  $\omega_{ij}$  décrivent la validation ou non de la mesure  $i$  avec la cible  $j$ .  $\omega_{ij}$  vaut 1 si  $\mathbf{z}_i$  appartient à la fenêtre de la cible no  $j$  ou 0 sinon. Pour l'exemple précédent, nous avons

$$\Omega_I(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \\ \mathbf{z}_5 \\ \mathbf{z}_6 \\ \mathbf{z}_7 \\ \mathbf{z}_8 \\ \mathbf{z}_9 \\ \mathbf{z}_{10} \end{array}$$

Puisque les mesures  $\mathbf{z}_5(k)$  et  $\mathbf{z}_7(k)$  ne sont pas validées, elles ne serviront pas à mettre à jour les pistes. On peut donc les supprimer de la liste des mesures utiles. D'autre part, la fenêtre de la cible no 3 est vide. Cette cible ne pourra donc pas être mise à jour par l'utilisation de mesures, mais uniquement par une propagation de sa dynamique. La colonne de  $\Omega_I$  correspondant à cette cible peut donc être supprimée.

Plus généralement, la **matrice de validation utile**, notée  $\Omega$ , est donc obtenue à partir de la matrice de validation initiale  $\Omega_I$  en supprimant à la fois les lignes correspondant aux mesures non validées et les colonnes correspondant aux fenêtres vides. Pour l'exemple considéré, nous aurons

$$\Omega(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \\ \mathbf{z}_6 \\ \mathbf{z}_8 \\ \mathbf{z}_9 \\ \mathbf{z}_{10} \end{array}$$

Dans un tel processus, nous devons bien évidemment mémoriser dans deux piles les index des cibles et des mesures intervenant dans cette matrice de validation utile.

#### 4.1.3 Routine de clustering

Pour aider le lecteur souhaitant réaliser rapidement des simulations de pistage multi-cibles, nous donnons ici une *routine* MatLab de clustering développée par l'auteur. Une *routine* Fortran peut également être trouvée en [DBS93].

La fonction **Compress** permet de compresser la matrice de validation initiale  $\Omega_I = \text{Omega\_Matrix}$  en matrice de validation utile  $\Omega = \text{Omega\_Compress}$ . Les piles **Target\_Indices** et **Measurement\_Indices** contiennent la liste des index des cibles et des mesures relatives à  $\Omega$ .

```
%*****
function [Omega_Compress,Target_Indices,Measurement_Indices]=Compress(Omega_Matrix);
%*****
% Purpose : This function returns the useful validation matrix computed from the
% initial validation matrix. This function must be called just before clustering .
% Author : Jean Dezert
%*****
if (isempty(Omega_Matrix)==1)
    Omega_Compress=Omega_Matrix;
    Target_Indices=[];
    Measurement_Indices=[];
    disp(' Warning in Compress .m routine ==> Omega_Matrix is empty ')
    return
end
Target_Indices=find(sum(Omega_Matrix,1)~=0); % Index of non empty gates
Measurement_Indices=find(sum(Omega_Matrix,2)~=0);% Index of validate measurements
% Compression of initial validation matrix
Omega_Compress=Omega_Matrix;
Omega_Compress(find(sum(Omega_Compress,2)==0),:)=[];
Omega_Compress(:,find(sum(Omega_Compress,1)'==0))= [];
return
```

La fonction **Clustering** permet d'effectuer automatiquement la séparation et le regroupement des cibles à partir de la matrice de validation utile  $\Omega = \text{Omega\_Compress}$ . Le résultat est stocké dans la matrice de clustering **Cluster\_Matrix**. Chaque ligne de cette matrice correspond à un *cluster* de cibles.

```
%*****
function [Cluster_Matrix]=Clustering(Omega_Compress);
%*****
% Purpose : Decomposition of a validation matrix into
%           a set of independant clusters in order to reduce the
%           combinatorics involving with MTT problems.
% Author : Jean Dezert
%*****
% Note : Each row gives the set of target involved in a cluster .
% Omega_Compress is the useful validation matrix obtained from Compression function.
```

```

[Nz,Ntarget]=size(Omega_Compress);

% Input checking

if (isempty(Omega_Compress)==1)
Cluster_Matrix=[];
return
end

% All targets are independant

if (sum(sum(Omega_Compress))==size(Omega_Compress,1))
Cluster_Matrix=eye(Ntarget,Ntarget);

return
end

% Cluster separation

Null_Row=zeros(1,size(Omega_Compress,2));
Cluster_Matrix=Omega_Compress;
for j=1:size(Omega_Compress,2)
L=(sum([Cluster_Matrix(find(Cluster_Matrix(:,j)~=0),:);Null_Row])~=0);
Cluster_Matrix(find(Cluster_Matrix(:,j)~=0),:)=[];
Cluster_Matrix=[Cluster_Matrix;L];
end
return

```

## 4.2 Pistage multi-cibles par JPDAF (1980)

Le **JPDAF** (Joint Probabilistic Data Association Filter) [FBSS80, FBSS80, FBSS83, BSF88] est une extension du filtre PDAF au cas de la poursuite multi-cibles. C'est donc une **approche bayésienne**.

### 4.2.1 Hypothèses du JPDAF

- le nombre  $T$  de cibles à pister est supposé **connu**
- pour chaque cible  $t$ , toute l'information disponible obtenue à partir de la séquence de mesures  $\mathbf{Z}^k$  est résumée par l'état estimé à l'instant courant  $\hat{\mathbf{x}}^t(k|k)$  (qui approxime la moyenne conditionnelle) et sa covariance  $\mathbf{P}^t(k|k)$
- à chaque instant  $k$ , l'état réel  $\mathbf{x}^t(k)$  d'une cible  $t$  est supposée gaussien avec  $\mathcal{N}(\mathbf{x}^t(k); \hat{\mathbf{x}}^t(k|k), \mathbf{P}^t(k|k))$
- chaque cible  $t$  possède une dynamique propre observable au travers du senseur
- la probabilité de détection  $P_d^t$  de chaque cible  $t$  est supposée connue
- les  $T$  cibles sont supposées perceptibles par le senseur

### 4.2.2 Principe général de la méthode

Considérons un groupe de  $T$  cibles représentées par les indices  $t = 1, \dots, T$  à un instant donné  $k$  regroupées en **un seul cluster** (cf paragraphe précédent). L'ensemble des  $m_k$  mesures de ce *cluster* est noté

$$\mathbf{Z}(k) = \{\mathbf{Z}^1(k) \cup \dots \cup \mathbf{Z}^T(k)\} \quad (4.1)$$

Chaque mesure  $\mathbf{z}_i(k)$  du *cluster* provient soit d'une cible parmi les cibles  $t = 1, \dots, T$  ou bien provient d'une fausse alarme que l'on caractérise par l'indice  $t = 0$ .

On note  $\hat{\mathbf{z}}^t(k|k-1)$  la mesure prédictive de la cible  $t$  et l'innovation associée à la mesure  $i$  est notée

$$\tilde{\mathbf{z}}_i^t(k) \triangleq \mathbf{z}_i(k) - \hat{\mathbf{z}}^t(k|k-1) \quad i = 1, \dots, m_k \quad (4.2)$$

L'innovation pondérée s'écrit

$$\tilde{\mathbf{z}}^t(k) = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i^t(k) \tilde{\mathbf{z}}_i^t(k) \quad (4.3)$$

où  $\beta_i^t(k)$  est la probabilité pour que la mesure  $i$  corresponde à celle de la cible  $t$ .  $\beta_0^t(k)$  est la probabilité pour qu'aucune des mesures ne provienne de la cible  $t$ . Cette innovation pondérée interviendra alors dans la mise à jour  $\hat{\mathbf{x}}^t(k|k)$  de l'état de la cible  $t$ . Ceci sera fait de la même façon pour n'importe quelle cible.

L'algorithme JPDAF évalue les  $\beta_i^t(k)$  **conjointement** avec l'ensemble des  $T$  cibles et des fausses alarmes présentes dans le *cluster*. La mise à jour de l'état d'une cible prendra alors en compte **à la fois les fausses alarmes et les mesures des cibles proches interférentes**.

La clé du JPDAF [FBSS83, BSF88] réside dans l'évaluation des probabilités conditionnelles de tous les événements d'association suivants

$$\Theta(k) = \bigcap_{i=1}^{m_k} \Theta_i^{t_i}(k) \quad (4.4)$$

où  $\Theta_i^{t_i}(k)$  représente l'événement pour que la mesure  $i$  provienne de la source associée  $t_i$ ,  $0 \leq t_i \leq T$ .  $t_i > 0$  désignant la source ayant généré la mesure  $i$  au temps  $k$ . L'indice  $t_i = 0$  signifie par convention que la mesure  $i$  est une fausse alarme. Les événements d'association faisables sont les événements conjoints pour lesquels une mesure est associée à une cible au plus.

Les probabilités  $\beta_i^t(k)$  pour que la mesure  $i$  provienne de la source  $t$  s'obtiennent en ajoutant la probabilité de tous les événements d'association conjoints faisables  $\Theta(k)$  pour lesquels cette condition est

vraie ; c'est à dire

$$\beta_i^t(k) = \sum_{\Theta(k)} P\{\Theta(k)|\mathbf{Z}^k\} \hat{\omega}_{it}(\Theta(k)) \quad i = 1, \dots, m_k \quad (4.5)$$

$$\beta_0^t(k) = 1 - \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i^t(k) \quad (4.6)$$

$\hat{\omega}_{it}(\Theta(k))$  représente la composante correspondante de la matrice d'association caractérisant l'événement  $\Theta(k)$ .

#### 4.2.3 Matrices d'associations faisables

On désigne par  $\Omega = [\omega_{it}]$  la matrice d'hypothèses construite à partir de la matrice de validation utile du cluster considéré et **augmentée d'une colonne unitaire en  $t = 0$**  correspondant à l'origine FA. Cette matrice d'hypothèses est généralement appelée matrice de validation par abus de langage dans la littérature.

$$\boxed{\Omega \triangleq [\omega_{it}] \quad i = 1, \dots, m_k \quad t = 0, \dots, T} \quad (4.7)$$

On rappelle que la colonne  $t = 0$  caractérise le fait que l'origine des mesures peut être une fausse alarme. A partir de cette matrice d'hypothèses, on peut construire un ensemble  $\{\Theta(k)\}$  **exclusif et exhaustif** d'hypothèses d'association conjointes *mesures↔origines* possibles (faisables). Chaque événement (hypothèse d'association conjointe possible) est caractérisé par une matrice d'associations faisables

$$\boxed{\hat{\Omega}(\Theta(k)) = [\hat{\omega}_{it}(\Theta(k))]} \quad (4.8)$$

Chaque matrice  $\hat{\Omega}(\Theta(k))$  représente un événement **faisable**  $\Theta(k)$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

- n'importe quelle matrice  $\hat{\Omega}(\Theta(k))$  doit rester **compatible** avec la matrice initiale d'hypothèses  $\Omega(k)$

$$\hat{\omega}_{it}(\Theta(k)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Theta_i^t(k) \in \Theta(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.9)$$

- chaque mesure **provient d'une seule source** à la fois

$$\boxed{\sum_{t=0}^T \hat{\omega}_{it}(\Theta(k)) = 1 \quad \forall i} \quad (4.10)$$

- une cible ne peut **générer qu'une seule mesure au plus**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m_k} \hat{\omega}_{it}(\Theta(k)) \leq 1 \quad t = 1, \dots, T} \quad (4.11)$$

#### 4.2.4 Indicateurs de détection, d'association et de FA

Pour les besoins des calculs, on définit les indicateurs  $\delta_t(\Theta)$ ,  $\tau_i(\Theta)$  et  $\phi(\Theta)$  suivants :

1. Indicateur de détection d'une cible  $\delta_t(\Theta)$

$$\boxed{\delta_t(\Theta) \triangleq \sum_{i=1}^{m_k} \hat{\omega}_{it}(\Theta) \leq 1 \quad t = 1, \dots, T} \quad (4.12)$$

2. Indicateur d'association des mesures  $\tau_i(\Theta)$

$$\boxed{\tau_i(\Theta) \triangleq \sum_{t=1}^T \hat{\omega}_{it}(\Theta)} \quad (4.13)$$

3. Indicateur du nombre de FA  $\phi(\Theta)$

$$\boxed{\phi(\Theta) \triangleq \sum_{i=1}^{m_k} [1 - \tau_i(\Theta)]} \quad (4.14)$$

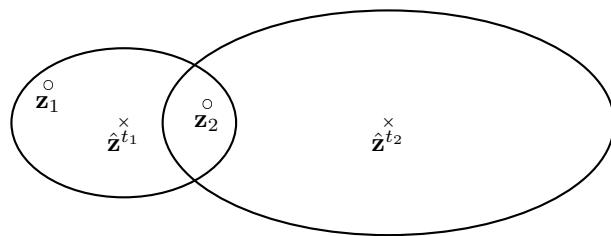
La génération automatique des matrices d'associations faisables est donnée après l'exemple qui suit.

#### 4.2.5 Exemple

Considérons un cas très simple où seulement deux cibles interfèrent et où la matrice initiale de validation [FBSS83, BSF88] est la suivante

$$\Omega = \begin{matrix} & \begin{matrix} t & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} j \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (4.15)$$

Ceci correspond par exemple à la situation suivante en 2D,



Dans ce cas, l'ensemble des matrices d'associations faisables est

$$\hat{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4.2.6 Génération des matrices d'associations

La génération automatique des matrices d'associations possibles  $\hat{\Omega}(\Theta(k))$  à partir de la matrice d'hypothèses  $\Omega$  est délicate et rebute souvent les utilisateurs potentiellement intéressés par l'évaluation du JPDAF. Pour ne pas les décourager, nous donnons ici, sans entrer dans le détail, le code MatLab permettant de générer automatiquement les matrices  $\hat{\Omega}(\Theta(k))$ .

Il faut savoir cependant que le nombre de matrices à générer **augmente exponentiellement** avec les dimensions du problème d'association. Ceci reste l'inconvénient majeur du JPDAF. Compte tenu de la nécessité d'une énumération exhaustive des matrices d'association, le JPDAF ne peut être utilisé que dans des configurations telles que les dimensions des *clusters* et des mesures associées ne soient pas trop importantes. Certains algorithmes JPDAF sous-optimaux ont été développés dans la littérature afin d'éviter une recherche exhaustive des matrices  $\hat{\Omega}(\Theta(k))$  et/ou faciliter un traitement rapide (et en parallèle) des calculs [FC89, DN93, ZB93, CM95]. L'algorithme présenté ici est l'algorithme **DFS** (Depth First Search) utilisé en [Zho92, ZB93] (initialement codé en Fortran en [Dez88]).

```
%*****
%* Purpose : This code implements the DFS algorithm for generating
%* exhaustive list of feasible joint association events from a given
%* initial validation matrix.
%*
%* Author : Jean Dezert
%*****
% mk= nbr of measurement
% nt = nbr of true targets (without FA)
% You can modify Omega_Matrix here as you want to see other DFS results
clear all
close all
Omega_Matrix=[1 1 0 ;1 1 1];
[mk nt]=size(Omega_Matrix);
nt=nt-1;
disp([' number of measurements --> mk=' num2str(mk)])
```

```

disp([ ' number of true targets --> nt=' num2str(nt)])  

disp( ' )  

ZZ=zeros(mk,nt+1);  

for j=1:mk  

disp([ ' Origin for measurement no =' num2str(j)])  

Zj=find(Omega_Matrix(j,:)^=0)-1;  

ZZ(j,1:size(Zj,2))=Zj;  

end  

%-----  

% DFS algorithm for feasible joint association events  

%-----  

Eps_Sol=zeros(mk,1);  

NS=1;  

disp([ ' Feasible matrix number NS=' ,num2str(NS)])  

Omega_hat=[ones(mk,1) zeros(mk,nt)] % Trivial solution  

L=0;j=1;jL=0;Ej=0;In_Loop1=1;XjL=0;X=zeros(1,2);  

while(In_Loop1==1)  

    if (j<=mk)  

        In_Loop2=1;  

        while(In_Loop2==1)  

            if ((L<min(nt,mk))&(j<=mk))  

                Xj=[];index=find(ZZ(j,:)>XjL);  

                if (isempty(index)==0),Xj=ZZ(j,index(1));end  

                if (isempty(Xj)==1) % Xj is empty  

                    XjL=0;j=j+1;  

                else % Xj is non empty  

                    XjL=Xj;  

                    if (isempty(find(Xj==X(:,2)))) % Xj is compatible  

                        NS=NS+1;L=L+1;X(L,:)=[j Xj];j=j+1;XjL=0;  

                        disp([ ' Feasible matrix number NS=' ,num2str(NS)])  

                        % Construction of a feasible association matrix (optional)  

                        Omega_hat=[ones(mk,1) zeros(mk,nt)];  

                        for ll=1:size(X,1)  

                            Omega_hat(X(ll,1),1)=0;  

                            Omega_hat(X(ll,1),X(ll,2)+1)=1;  

                        end  

                        Omega_hat=Omega_hat  

                    % Derivation of joint association probability

```

```
% must be implemented here)
end % if(Xj_Compatible==1)
end % if(isempty(find(Xj==X(:,2))))
else
    In_Loop2=0;
    if(L>=1) % Backtracking
        j=X(L,1);XjL=X(L,2);X(L,:)=[];L=L-1;
    end % if(L>=1)
    end % if((L<min(nt,mk))&(j<=mk))
end % while(In_Loop2==1)
else ,
    In_Loop1=0; % Exit flag
end
end % while(In_Loop1==1)
disp(' ')
disp([' --> All ',num2str(NS),' solutions have been generated by DFS'])
```

### Exemple de génération par algorithme DFS

Considérons le cas très simple à 3 mesures où seulement 2 cibles interfèrent avec la matrice initiale de validation est suivante :

$$\Omega = \begin{matrix} & t & 0 & 1 & 2 \\ j & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & & 1 & 1 & 1 \\ 3 & & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (4.16)$$

La génération des matrices par l'algorithme DFS consiste à parcourir successivement les branches de l'arborescence suivante :

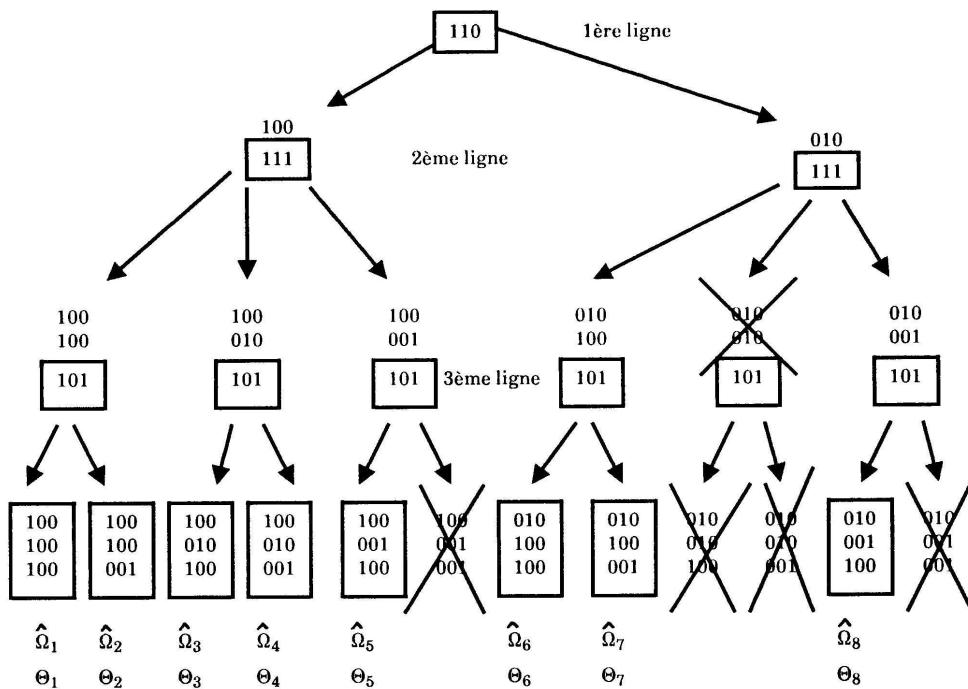


FIG. 4.1 – Exemple de génération des matrices par algorithme DFS

#### 4.2.7 Expression des probabilités d'associations conjointes

Pour mettre en œuvre le JPDAF, il nous faut d'abord évaluer les probabilités d'associations conjointes  $P\{\Theta(k)|\mathbf{Z}^k\}$ , puis pour chaque cible  $t$ , les probabilités marginales d'associations  $\beta_i^t(k)$  en utilisant les relations (4.5) et (4.6).

En utilisant la règle de Bayes, on écrit

$$P\{\Theta(k)|\mathbf{Z}^k\} = \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k)|\Theta(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\Theta(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \quad (4.17)$$

où  $c$  est une constante de normalisation.

Pour simplifier le développement des calculs, on suppose

- que l'on a un seul volume de surveillance  $V$  englobant toutes les fenêtres de validation du *cluster* à analyser,
- que **les états des cibles sont mutuellement indépendants** sachant l'ensemble des mesures disponibles [BSL95],
- que les mesures ne provenant pas des cibles sont uniformément réparties dans le volume de surveillance  $V$  du senseur.

### Fonction de vraisemblance des mesures

La (fonction de) vraisemblance des mesures conditionnellement à  $\Theta(k)$  s'écrit

$$p[\mathbf{Z}(k)|\Theta(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] = \prod_{i=1}^{m_k} p[\mathbf{z}_i(k)|\Theta_i^{t_i}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] \quad (4.18)$$

$m_k$  étant le nombre total de mesures validées présentes dans le *cluster* de cibles considéré. La densité de probabilité d'une mesure  $\mathbf{z}_i$  sachant son origine s'écrit

$$p[\mathbf{z}_i(k)|\Theta_i^{t_i}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] = \begin{cases} V^{-1} & \text{si } \tau_i(\Theta(k)) = 0 \\ e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k)) \triangleq \mathcal{N}[\mathbf{z}_i(k); \hat{\mathbf{z}}^{t_i}(k|k-1), \mathbf{S}^{t_i}(k)] & \text{si } \tau_i(\Theta(k)) = 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

$\hat{\mathbf{z}}^{t_i}(k|k-1)$  est la mesure prédite de la cible  $t_i$  avec pour covariance de l'innovation associée  $\mathbf{S}^{t_i}(k)$ . En tenant compte de ces expressions, on obtient la vraisemblance suivante

$$p[\mathbf{Z}(k)|\Theta(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] = V^{-\phi(\Theta(k))} \prod_{i=1}^{m_k} [e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\Theta(k))} \quad (4.20)$$

On rappelle que  $\phi(\Theta(k))$  indique le nombre de mesures considérées comme FA dans l'évènement  $\Theta(k)$ .

### Probabilité a priori d'un évènement $\Theta(k)$

La probabilité a priori d'un évènement  $\Theta(k)$  peut être décomposée [BSL95] selon

$$P\{\Theta(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \equiv P\{\Theta(k)|m_k\} = P\{\Theta(k), \delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k))|m_k\} \quad (4.21)$$

Ce qui peut encore être décomposé avec la règle de Bayes sous la forme

$$P\{\Theta(k), \delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k))|m_k\} = P\{\Theta(k)|\delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k)), m_k\} P\{\delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k))|m_k\} \quad (4.22)$$

La première probabilité  $P\{\Theta(k)|\delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k)), m_k\}$  est égale à l'inverse du nombre de permutations de  $m_k - \phi(\Theta(k))$  mesures (associées aux cibles dans  $\Theta(k)$ ) prises parmi les  $m_k$  disponibles. On suppose ici que toutes ces permutations sont équiprobables. Ainsi, on a

$$P\{\Theta(k)|\delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k)), m_k\} = \frac{1}{P_{m_k-\phi(\Theta(k))}^{m_k}} = \frac{\phi(\Theta(k))!}{m_k!} \quad (4.23)$$

La probabilité  $P\{\delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k))|m_k\}$  est obtenue en supposant  $\delta$  et  $\phi$  indépendants. On a alors

$$P\{\delta(\Theta(k)), \phi(\Theta(k))|m_k\} = \mu_F(\phi(\Theta(k))) \prod_{t=1}^T (P_d^t)^{\delta_t(\Theta(k))} (1 - P_d^t)^{1 - \delta_t(\Theta(k))} \quad (4.24)$$

En remplaçant les expressions précédentes dans (4.21), on obtient finalement

$$P\{\Theta(k)|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{\phi(\Theta(k))!}{m_k!} \mu_F(\phi(\Theta(k))) \prod_{t=1}^T (P_d^t)^{\delta_t(\Theta(k))} (1 - P_d^t)^{1 - \delta_t(\Theta(k))} \quad (4.25)$$

### Expression finale de $P\{\Theta(k)|\mathbf{Z}^k\}$

En remplaçant (4.20) et (4.25) dans (4.17), on aboutit à l'expression finale cherchée

$$P\{\Theta(k)|\mathbf{Z}^k\} = \frac{1}{c} \times \frac{\phi(\Theta(k))!}{m_k!} \mu_F(\phi(\Theta(k))) V^{-\phi(\Theta(k))} \prod_{i=1}^{m_k} [e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\Theta(k))} \prod_{t=1}^T (P_d^t)^{\delta_t(\Theta(k))} (1 - P_d^t)^{1 - \delta_t(\Theta(k))} \quad (4.26)$$

où  $c$  est une constante de normalisation.

En pratique deux versions du JPDAF sont utilisées selon le modèle choisi pour  $\mu_F(\Phi)$  [FBSS83, BSF88].

#### 4.2.8 Version paramétrique du JPDAF

Dans ce cas, on suppose que le nombre  $\phi$  de fausses alarmes suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  $\lambda$  représente la densité spatiale du clutter dans l'espace d'observation. Ainsi, on suppose donc

$$\mu_F(\phi) = \frac{(\lambda V)^\phi}{\phi!} e^{-\lambda V} \quad (4.27)$$

Sous cette hypothèse, les probabilités a posteriori des événements d'associations s'expriment alors comme

$$P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^{m_k} [\lambda^{-1} e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\Theta)} \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\Theta)} [1 - P_d^t]^{1 - \delta_t(\Theta)} \quad (4.28)$$

où  $c$  est une nouvelle constante de normalisation.

### 4.2.9 Version non paramétrique du JPDAF

Dans ce cas, on suppose n'avoir aucune information sur la masse de probabilités de  $\phi$  et l'on adopte l'hypothèse de loi diffuse pour  $\mu_F(\phi)$  à savoir,

$$\mu_F(\phi) = \epsilon \quad (4.29)$$

Les probabilités a posteriori des événements conjoints d'association s'expriment maintenant comme

$$P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} = \frac{\phi!}{c} \prod_{i=1}^{m_k} [V e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\Theta)} \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\Theta)} [1 - P_d^t]^{1-\delta_t(\Theta)} \quad (4.30)$$

où  $c$  est une autre constante de normalisation.

Dans l'expression de  $P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\}$  obtenue avec la version non paramétrique du JPDAF intervient le terme  $\phi!/V^\phi$  que l'on appelle **pseudo-densité spatiale des FA**. Ce terme est analogue au terme  $\lambda^\phi$  intervenant dans la version paramétrique du calcul de  $P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\}$ .

### 4.2.10 Equations de mise à jour et de prédiction

Une fois l'énumération exhaustive des événements conjoints d'associations faisables effectuée, on évalue les probabilités  $P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\}$ . Puis pour chaque cible  $t$ , les probabilités marginales d'associations  $\beta_i^t(k)$  sont calculées en utilisant les relations (4.5) et (4.6).

La mise à jour de chaque cible (i.e. le calcul de  $\hat{\mathbf{x}}^t(k|k)$  et de  $\mathbf{P}^t(k|k)$ ) est réalisée simplement par les équations de mise à jour du filtre PDAF standard, ou mieux encore par les équations du filtre PDAF modifié.

La prédictions  $\hat{\mathbf{x}}^t(k+1|k)$  et  $\mathbf{P}^t(k+1|k)$  sont obtenues par les équations de prédiction classiques du filtre de Kalman (ou de Kalman étendu selon la linéarité du modèle de dynamique choisi).

### 4.2.11 Version couplée du JPDAF

Les équations de mise à jour précédentes ne sont valables que si l'on admet l'indépendance des cibles entre elles conditionnellement aux mesures passées. C'est bien sûr une approximation.

En fait, dès l'instant où les cibles ont interfér  , elles ne peuvent plus être théoriquement consid r es comme indépendantes. On doit alors considérer des termes de couplage entre les différentes estim es. Ces termes de couplages sont caractérisés par des matrices (non nulles) de covariance crois e. Pour prendre en compte la correlation des cibles, on utilise donc un super-vecteur d'état qui est tout simplement l'empilement des vecteurs d'état de chaque cible du cluster. Ce super-vecteur d'état est estimé globalement

ainsi que sa matrice de covariance (globale) associée. Ceci constitue le principe de la version couplée du JPDAF - appelée **JPDAFC** (JPDAF Coupled).

Les probabilités d'associations conjointes sont alors données par

$$P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} = \frac{1}{c} [\lambda^{-1} e_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots}(\mathbf{z}_i(k), i : \tau_i(\Theta(k)) = 1)] \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\Theta(k))} [1 - P_d^t]^{1 - \delta_t(\Theta(k))} \quad (4.31)$$

où  $e_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots}$  est la densité de probabilité conjointe des mesures associées aux cibles sous  $\Theta$ . Dans la version **couplée** du JPDAF, on utilise directement ces probabilités  $P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\}$  dans la mise à jour de l'état global et non plus les probabilités marginales comme on le faisait dans la mise en œuvre découpée.

Il faut savoir que le JPDAFC, bien que théoriquement plus satisfaisant, est rarement employé en pratique.

### Exemple simple du JPDAFC

Soit 2 cibles  $t_1$  et  $t_2$  appartenant au même *cluster* (c.à.d. ayant des mesures appartenant à l'intersection des fenêtres de validation des cibles), l'état global prédit et la matrice de covariance globale prédite s'écrivent

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^{t_1}(k|k-1) \\ \hat{\mathbf{x}}^{t_2}(k|k-1) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{t_1, t_1}(k|k-1) & \mathbf{P}^{t_1, t_2}(k|k-1) \\ \mathbf{P}^{t_2, t_1}(k|k-1) & \mathbf{P}^{t_2, t_2}(k|k-1) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$\mathbf{P}^{t_1, t_2} = \mathbf{P}^{t_2, t_1}$  sont les matrices de *cross-covariance* entre les estimées des états des deux cibles. La mise à jour de l'état global est obtenue par l'équation suivante

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \sum_{\Theta(k)} P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} [\mathbf{z}(k, \Theta) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)] \quad (4.34)$$

avec

$$\mathbf{z}(k, \Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j_1}(k, \Theta) \\ \mathbf{z}_{j_2}(k, \Theta) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{t_1}(k) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^{t_2}(k) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^1(k) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^2(k) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)'[\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)' + \mathbf{R}(k)]^{-1} \quad (4.38)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^{t_1}(k|k-1) \\ \hat{\mathbf{z}}^{t_2}(k|k-1) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (4.39)$$

La mise à jour de la covariance globale est donnée par l'équation (3.52) du PDAF avec ici  $\beta_0(k)$  définie comme

$$\beta_0(k) = P\{\Theta_0|\mathbf{Z}^k\} = 1 - \sum_{\Theta(k) \neq \Theta_0} P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} \quad (4.40)$$

où l'évènement particulier  $\Theta_0$  correspond à l'hypothèse selon laquelle toutes les mesures sont des fausses alarmes.

### Extension au cas des mesures multi-sources

Dans la présentation précédente, on a supposé que chaque mesure provenait d'une seule origine et que les cibles étaient résolues (inférieure à la case de résolution du senseur). En fait, selon la taille des cibles et la résolution du senseur, il est possible que plusieurs cibles soient dans la même case de résolution du senseur. Dans ce cas, le senseur ne voit qu'une seule mesure. On parle alors de **mesure multi-sources**. Une extension du JPDAF et du JPDAFC a conduit au développement des filtres **JPDAF** (JPDA Merged measurement) et **JPDAFC** en [Cha83, CB83, CB84b, Cha86]. Nous ne détaillerons pas ici le principe de ces filtres qui sont basés sur une modélisation spécifique de la mesure multi-sources.

#### 4.2.12 En résumé

##### Les hypothèses du JPDAF

- Il y a plusieurs cibles à pister dans du clutter
- Le nombre  $T$  de cibles est connu
- Les  $T$  pistes des cibles sont déjà initialisées
- La probabilité de détection de chaque cible est connue et ne dépend pas de l'état des cibles
- Les cibles sont supposées perceptibles
- Les modèles de dynamique des cibles peuvent être différents
- Il existe des mesures communes aux fenêtres de validation des cibles
- Chaque cible génère au plus une mesure (pas de réflexions multiples, pas de cibles étendues)
- Chaque mesure provient d'une seule source (pas de mesure multi-source)
- la densité de probabilité de l'état de chaque cible conditionnée par les mesures passées est supposée gaussienne et indépendante des autres cibles. Toute l'information passée est résumée dans l'état prédit et la covariance prédictive au dernier instant.

### Principe de mise en œuvre du JPDAF

- Prédire l'état et la mesure de chaque cible
- Valider les mesures reçues dans chaque fenêtre de validation
- Isoler et regrouper les cibles en *clusters*
- Pour chaque cible appartenant à un *cluster* de taille  $> 2$  :
  - Générer la liste des matrices d'associations conjointes faisables
  - Calculer la probabilité des évènements d'associations conjointes
  - Evaluer les probabilités marginales d'associations  $\beta_i(k)$
  - Mettre à jour l'état de la cible avec les équations du PDAF
  - Prédire l'état de la cible avec les équations du modèle

### Avantages du JPDAF

- Relative simplicité de mise en œuvre
- N'exige pas de stockage en mémoire (0-scan back)
- Donne de bons résultats lorsque la densité du clutter n'est pas trop importante

### Limitations du JPDAF

- Le nombre  $T$  de cibles pistées doit être connu
- Les pistes doivent être initialisées
- Les cibles doivent être perceptibles
- Le nombre de matrices d'association croît exponentiellement avec la dimension du problème

### Extensions du JPDAF[BS74, FBSS80, FBSS83, SOG89]

- Des versions sous-optimales existent [Fit86, BS90, RP93, Roe93, Roe94]
- Version couplée possible (JPDACF) [BW87]
- Version avec mesures multi-sources (JPDAMF) [TW81, Cha83, CB83, CB84b, Cha86]
- Version couplée avec mesures multi-sources (JPDAMCF)
- Prise en compte possible de la perception des cibles (IJPDAF) [DLL98]
- Prise en compte possible de mesures de reconnaissance [LBS90a, Dez90, Dez92]

## 4.3 Pistage multi-cibles par IJPDAF (1998)

Nous présentons ici l'extension du filtrage IPDAF au cas multi-cibles. L'idée de base consiste à reprendre le formalisme du JPDAF standard en y incluant la notion de perception des cibles. Dans le JPDAF standard, les auteurs ont implicitement supposé que les  $T$  cibles présentes dans un cluster étaient toujours perceptibles par le senseur. En pratique, ce n'est bien évidemment pas toujours le cas et on doit donc intégrer la probabilité de perception des cibles au sein même de l'algorithme de pistage tout comme pour l'algorithme IPDAF développé pour le pistage mono-cible. Ce filtre sera dorénavant désigné sous l'acronyme **IJPDAF** (Integrated Joint Probabilistic Data Association Filter) [DLL98]. Dans son

essence, l'IJPDAF suit l'idée du JPDAF standard mais l'évaluation des probabilités (intégrées) d'associations conjointes diffère.

Très récemment, certains auteurs [SP98] ont proposé un algorithme de pistage multi-cibles intégrant aussi la perception des cibles. Cet algorithme est basé sur la méthode de Viterbi pour réaliser l'association des données. Le point faible reste toutefois la non-prise en compte du croisement possible des cibles. Ceci renforce le choix de l'IJPDAF pour le pistage multi-cibles robuste.

### 4.3.1 Hypothèses de l'IJPDAF

Les hypothèses de l'IJPDAF sont exactement les mêmes que celles du JPDAF (voir section 4.2.1) excepté que l'on ne suppose pas ici la perception totale des cibles présentes dans le cluster.

### 4.3.2 Principe général de la méthode

Considérons un cluster de cibles représentées par les indices  $t = 1, \dots, T$  à un instant donné  $k$ . L'ensemble des  $m_k$  mesures associées à ce cluster est noté

$$\mathbf{Z}(k) = \{\mathbf{Z}^1(k) \cup \dots \cup \mathbf{Z}^T(k)\} \quad (4.41)$$

Chaque mesure  $\mathbf{z}_i(k)$  du cluster provient soit d'une cible perceptible parmi les cibles  $t = 1, \dots, T$  ou bien provient d'une fausse alarme que l'on caractérise par l'indice  $t = 0$ .

On note  $\hat{\mathbf{z}}^t(k|k-1)$  la mesure prédite de la cible  $t$  et l'innovation associée à la mesure  $i$  est notée

$$\tilde{\mathbf{z}}_i^t(k) \triangleq \mathbf{z}_i(k) - \hat{\mathbf{z}}^t(k|k-1) \quad i = 1, \dots, m_k \quad (4.42)$$

L'innovation pondérée s'écrit

$$\tilde{\mathbf{z}}^t(k) = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i^t(k) \tilde{\mathbf{z}}_i^t(k)$$

(4.43)

Cette innovation pondérée interviendra alors dans la mise à jour  $\hat{\mathbf{x}}^t(k|k)$  de l'état de la cible  $t$ . Ceci sera fait de la même façon pour n'importe quelle cible. Comme pour l'IPDAF, on définit  $\beta_i^t(k)$  comme étant la **probabilité marginale d'association intégrée** pour que la mesure  $i$  corresponde à celle de la cible perceptible  $t$ ,  $\beta_0^t(k)$  la probabilité pour qu'aucune des mesures ne provienne de la cible perceptible  $t$  et  $\beta_{\bar{0}}^t(k)$  la probabilité pour que la cible  $t$  soit imperceptible au temps  $k$ . La terminologie slintégrée indique le fait que l'on prend en compte (i.e. on intègre) la probabilité de perception de la cible dans le calcul des probabilités d'associations.

Les approches IJPDA et IPDA utilisent les mêmes équations de filtrage pour l'estimation récursive de l'état des cibles. La seule différence entre ces deux approches concerne la façon dont les probabilités marginales d'associations  $\beta_i^t(k)$  sont calculées.

Pour l'algorithme IPDA, les  $\beta_i^t(k)$ ,  $i = \bar{0}, 0, \dots, m_k$  sont évaluées **séparément pour chacune des cibles** en supposant explicitement que toutes les mesures n'émanant pas de la cible d'intérêt sont nécessairement des fausses alarmes et en prenant en compte de surcroît la probabilité de perception de celle-ci.

Pour l'IJPDA, on évalue les  $\beta_i^t(k)$  **conjointement** avec l'ensemble des  $T$  cibles et des fausses alarmes. La mise à jour de l'état d'une cible prend alors en compte à la fois les fausses alarmes et les mesures des cibles proches et interférentes.

### 4.3.3 Exemple

Le calcul des probabilités d'associations conjointes intégrées repose sur l'évaluation des probabilités conditionnelles de tous les événements **intégrés faisables** qui prennent en compte l'état de perception des cibles. Pour clarifier les choses, reprenons l'exemple précédent en introduisant la notion de perception des cibles. Reprenons le cas simple de deux cibles interférentes et correspondant à la matrice initiale de validation suivante

$$\Omega = \begin{matrix} & t & 0 & 1 & 2 \\ j & & & & \\ 1 & & 1 & 1 & 0 \\ 2 & & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad (4.44)$$

Les matrices d'associations faisables  $\hat{\Omega}(\Theta)$  doivent maintenant être modifiées afin de prendre en compte la possibilité ou non de perception des cibles par le senseur. Ceci peut être réalisé simplement en ajoutant une ligne supplémentaire (indexée par l'indice  $j = 0$ ) correspondant à une mesure fictive  $\mathbf{z}_0$ . Chaque élément  $\hat{\omega}_{0t}$  de cette ligne décrira l'état de perception d'une cible  $t$  par le senseur. On dira que la cible  $t$  ( $t > 0$ ) est perceptible lorsque  $\hat{\omega}_{0t} = 1$ . Sinon on aura  $\hat{\omega}_{0t} = 0$ . L'élément  $\hat{\omega}_{00}$  qui n'entre jamais dans les calculs peut être pris à n'importe quelle valeur. Par convention, on prendra dans la suite  $\hat{\omega}_{00} \equiv 0$ . Par une telle modification des matrices d'associations faisables  $\hat{\Omega}$  du JPDAF standard, nous sommes maintenant en mesure de générer l'ensemble des matrices  $\hat{\Omega}^I$  caractérisant les événements conjoints intégrés faisables. On obtient pour notre exemple

$$\hat{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega}_1^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_2^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_3^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_4^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega}_5^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_6^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega}_7^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_8^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega}_9^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\Omega}_{10}^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega}_{11}^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est clair que la génération des matrices  $\hat{\Omega}^I$  à partir des matrices  $\hat{\Omega}$  tient bien sûr compte de la contrainte de faisabilité supplémentaire suivante :

**(C1) : Toute cible détectée est nécessairement perceptible.**

Chaque matrice d'associations  $\hat{\Omega}_j^I, j = 1 \dots, 11$  caractérise un évènement intégré d'associations conjointes que l'on désigne par  $\mathcal{E}_j$ . On note par  $P(\mathcal{E}_j | \mathbf{Z}^k)$  la probabilité a posteriori de chaque évènement  $\mathcal{E}_j$ . Comme les évènements  $\mathcal{E}_j$  sont mutuellement exclusifs et qu'ils forment un ensemble exhaustif d'hypothèses d'associations intégrées, on a toujours

$$\boxed{\sum_j P(\mathcal{E}_j | \mathbf{Z}^k) = 1} \quad (4.45)$$

Quand les probabilités  $P(\mathcal{E}_j | \mathbf{Z}^k)$  sont évaluées (cf section suivante), les probabilités intégrées marginales d'associations  $\beta_i^t(k), i = \bar{0}, 0, \dots, m_k$  sont obtenues en ajoutant les probabilités  $P(\mathcal{E}_j | \mathbf{Z}^k)$  des évènements

conjoints  $\mathcal{E}_j$  dans lesquels l'évènement marginal a lieu.

Dans notre exemple, les probabilités intégrées marginales relatives aux cibles  $t = 1$  and  $t = 2$  s'expriment comme

1. pour les probabilités marginales d'associations de la cible  $t_1$

$$\beta_0^1(k) = P\{\bar{O}_k^1 \cap \theta_0^1(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_1 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_4 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_8 | \mathbf{Z}^k)$$

$$\beta_0^1(k) = P\{O_k^1 \cap \theta_0^1(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_2 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_3 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_7 | \mathbf{Z}^k)$$

$$\beta_1^1(k) = P\{O_k^1 \cap \theta_1^1(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_9 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_{10} | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_{11} | \mathbf{Z}^k)$$

$$\beta_2^1(k) = P\{O_k^1 \cap \theta_2^1(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_5 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_6 | \mathbf{Z}^k)$$

2. pour les probabilités marginales d'associations de la cible  $t_2$

$$\beta_0^2(k) = P\{\bar{O}_k^2 \cap \theta_0^2(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_1 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_2 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_6 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_{10} | \mathbf{Z}^k)$$

$$\beta_0^2(k) = P\{O_k^2 \cap \theta_0^2(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_3 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_4 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_5 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_9 | \mathbf{Z}^k)$$

$$\beta_1^2(k) = P\{O_k^2 \cap \theta_1^2(k) | \mathbf{Z}^k\} = 0$$

$$\beta_2^2(k) = P\{O_k^2 \cap \theta_2^2(k) | \mathbf{Z}^k\} = P(\mathcal{E}_7 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_8 | \mathbf{Z}^k) + P(\mathcal{E}_{11} | \mathbf{Z}^k)$$

On peut en outre facilement vérifier que

$$\sum_{i=0,1,\dots,m_k} \beta_i^t(k) = 1 \quad \forall t = 1, 2 \quad (4.46)$$

La mise à jour (puis la prédiction) de l'état de chaque cible est ensuite réalisée par les équations de filtrage de l'IPDAF présentées précédemment.

#### 4.3.4 Expression théorique des probabilités $P\{\mathcal{E} | \mathbf{Z}^k\}$

Un évènement intégré d'associations conjointes  $\mathcal{E}$  au temps  $k$  peut être mathématiquement défini par

$$\boxed{\mathcal{E}(k) = \left[ \bigcap_{i=1}^{m_k} \mathcal{O}_i(k) \right] \bigcap \left[ \bigcap_{t=1}^T \mathcal{P}_t(k) \right]} \quad (4.47)$$

où  $\mathcal{O}_i(k)$  représente l'**origine de la mesure  $i$**  (soit du clutter, soit la cible  $1, \dots$ , soit la cible  $T$ ).  $\mathcal{P}_t(k)$  représente l'**état de perception** de la cible  $t$  par le senseur.  $\mathcal{P}_t(k)$  vaudra  $O_k^t$  lorsque la cible  $t$  est perceptible ou bien  $\bar{O}_k^t$  dans le cas contraire). L'évènement  $\mathcal{E}$  intègre à la fois les hypothèses sur l'origine des mesures et les hypothèses sur les perceptions de cibles. Ceci justifie la terminologie *intégrée* utilisée.

#### Matrices d'associations intégrées

Chaque évènement  $\mathcal{E}(k)$  est caractérisé par une matrice d'associations intégrée de taille  $(m_k + 1) \times (T + 1)$

$$\boxed{\hat{\Omega}^I(\mathcal{E}) = [\hat{\omega}_{it}(\mathcal{E})]} \quad (4.48)$$

dont les éléments valent soit 0 ou 1. Les éléments valant 1 doivent être compatibles avec ceux de la matrice de validation initiale  $\Omega$  et correspondre à la description de l'évènement  $\mathcal{E}$  considéré. En d'autres termes, on devra avoir pour  $t = 0, 1, \dots, T$  et  $i = 1, \dots, m_k$

$$\hat{\omega}_{it}(\mathcal{E}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathcal{O}_i(k) = t) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.49)$$

et pour  $t = 1, \dots, T$

$$\hat{\omega}_{0t}(\mathcal{E}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathcal{P}_t(k) = O_k^t) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.50)$$

Un évènement d'association  $\mathcal{E}$  sera dit **faisable** s'il satisfait les contraintes suivantes

- (1) **chaque mesure provient d'une seule origine**, i.e.,

$$\boxed{\sum_{t=0}^T \hat{\omega}_{it}(\mathcal{E}) = 1 \quad \forall i > 0} \quad (4.51)$$

- (2) **chaque cible perceptible génère au plus une mesure**

$$\boxed{\delta_t(\mathcal{E}) \triangleq \sum_{i=1}^{m_k} \hat{\omega}_{it}(\mathcal{E}) \leq 1 \quad t = 1, \dots, T} \quad (4.52)$$

- (3) **toute cible détectée est nécessairement perceptible**

$$\boxed{\hat{\omega}_{0t}(\mathcal{E}) - \delta_t(\mathcal{E}) \geq 0 \quad t = 1, \dots, T} \quad (4.53)$$

La variable binaire  $\delta_t(\mathcal{E})$  est appelée indicateur de détection de la cible  $t$ . Les indicateurs d'associations des mesures  $\tau_i(\mathcal{E})$  et de fausses mesures  $\phi(\mathcal{E})$  ont été définis dans le JPDAF standard. La variable binaire  $\pi_t(\mathcal{E}) \triangleq \hat{\omega}_{0t}(\mathcal{E})$  est appelée **indicateur de perception** de la cible car elle décrit l'état de perception de celle-ci dans l'évènement  $\mathcal{E}$ .

La génération des matrices  $\hat{\Omega}^I(\mathcal{E})$  peut être obtenue à partir des matrices d'associations intervenant dans le JPDAF classique. Pour cela **on doit ajouter**, comme on l'a montré dans l'exemple précédent, **une ligne supplémentaire d'indice 0** qui décrit les hypothèses concernant l'état de perception des cibles. Ainsi à partir de chaque matrice  $\hat{\Omega}(\Theta)$  du JPDAF classique, on doit générer  $N_\Theta$  matrices d'associations intégrées  $\hat{\Omega}^I(\mathcal{E})$  avec

$$N_\Theta = \prod_{t=1}^T 2^{1-\delta_t(\Theta)} \quad (4.54)$$

### Remarque

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la mise en œuvre de l'IJPDAF ne nécessite pas en fait la génération exhaustive des matrices  $\hat{\Omega}^I(\mathcal{E})$  mais uniquement celle des matrices  $\hat{\Omega}(\Theta)$ . Ceci provient

d'une simplification possible dans le calcul théorique des probabilités marginales d'associations intégrées. Compte tenu de cette remarque importante, on peut donc affirmer que **l'IJPDAF ne sera pas beaucoup plus coûteux en calculs que le JPDAF standard**. Seule, une faible charge supplémentaire en calculs provient de l'évaluation des probabilités de perception des cibles. Ceci confère à l'IJPDAF une caractéristique appréciable pour les **applications de pistage multi-cibles en temps réel**.

### Expression des probabilités

L'évaluation des probabilités intégrées d'associations conjointes est obtenue par la règle de décomposition de Bayes suivante

$$P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} = P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}(k), m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\mathcal{E}|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} \quad (4.55)$$

où  $c$  est une constante de normalisation.

Si on suppose que les états des cibles, étant données les observations disponibles, sont mutuellement indépendants, alors la **fonction de vraisemblance des mesures**  $p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}]$  reste identique à celle obtenue dans le développement du JPDAF, à savoir

$$p[\mathbf{Z}(k)|\mathcal{E}, m_k, \mathbf{Z}^{k-1}] = V^{-\phi(\mathcal{E})} \prod_{i=1}^{m_k} [e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\mathcal{E})} \quad (4.56)$$

où  $e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k)) \triangleq \mathcal{N}[\mathbf{z}_i(k); \hat{\mathbf{Z}}^{t_i}(k|k-1), \mathbf{S}^{t_i}(k)]$  est la vraisemblance de la mesure  $\mathbf{z}_i(k)$  associée à la cible  $t_i = \mathcal{O}_i(\mathcal{E})$ .  $\hat{\mathbf{z}}^{t_i}(k|k-1)$  est la mesure prédictive de la cible  $t_i$  dont la covariance de l'innovation associée est  $\mathbf{S}^{t_i}(k)$ .  $V$  est le volume d'observation du senseur de poursuite.

La **probabilité a priori** de chaque évènement  $\mathcal{E}$  s'exprime comme

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}|m_k, \mathbf{Z}^{k-1}\} &\equiv P\{\mathcal{E}|m_k\} = \frac{\phi(\mathcal{E})!}{m_k!} \mu_F(\Phi(\mathcal{E})) \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\mathcal{E})} [1 - P_d^t]^{1-\delta_t(\mathcal{E})} \\ &\quad \times \prod_{t=1}^T [P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{\pi_t(\mathcal{E})} [1 - P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{1-\pi_t(\mathcal{E})} \end{aligned} \quad (4.57)$$

où  $\mu_F(\phi)$  représente la masse de probabilités du nombre de fausses mesures  $\phi$  dans l'évènement  $\mathcal{E}$ .  $P_{k|k-1, m_k}^{O^t}$  est la probabilité de perception prédictive de la cible. Le calcul de cette probabilité a été présenté dans le développement de l'IPDAF.

A partir des expressions précédentes, on voit que la probabilité a posteriori  $P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\}$  de chaque évènement intégré d'associations conjointes  $\mathcal{E}$  est finalement donnée par

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} &= \frac{1}{c} \frac{\phi(\mathcal{E})!}{m_k!} \frac{\mu_F(\phi(\mathcal{E}))}{V^{\phi(\mathcal{E})}} \prod_{i=1}^{m_k} [e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\mathcal{E})} \\
&\quad \times \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\mathcal{E})} [1 - P_d^t]^{1-\delta_t(\mathcal{E})} \\
&\quad \times \prod_{t=1}^T [P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{\pi_t(\mathcal{E})} [1 - P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{1-\pi_t(\mathcal{E})} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

#### 4.3.5 Version paramétrique de l'IJPDAF

Si on suppose que  $\mu_F(\phi)$  est une loi de Poisson, les probabilités intégrées d'associations conjointes s'expriment

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} &= \frac{1}{c} \prod_{i=1}^{m_k} [\lambda^{-1} e_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\mathcal{E})} \\
&\quad \times \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\mathcal{E})} [1 - P_d^t]^{1-\delta_t(\mathcal{E})} \\
&\quad \times \prod_{t=1}^T [P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{\pi_t(\mathcal{E})} [1 - P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{1-\pi_t(\mathcal{E})} \quad (4.59)
\end{aligned}$$

où  $c$  est une nouvelle constante de normalisation.

#### 4.3.6 Version non paramétrique de l'IJPDAF

Avec une loi diffuse pour  $\mu_F(\phi)$ , les probabilités intégrées d'associations conjointes s'expriment alors

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} &= \frac{\Phi(\mathcal{E})!}{c} \prod_{i=1}^{m_k} [Ve_{t_i}(\mathbf{z}_i(k))]^{\tau_i(\mathcal{E})} \\
&\quad \times \prod_{t=1}^T [P_d^t]^{\delta_t(\mathcal{E})} [1 - P_d^t]^{1-\delta_t(\mathcal{E})} \\
&\quad \times \prod_{t=1}^T [P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{\pi_t(\mathcal{E})} [1 - P_{k|k-1, m_k}^{O^t}]^{1-\pi_t(\mathcal{E})} \quad (4.60)
\end{aligned}$$

où  $c$  est une autre constante de normalisation.

#### 4.3.7 Probabilités marginales d'associations intégrées

En supposant les états des cibles mutuellement indépendants sachant les mesures disponibles, les probabilités marginales d'associations s'obtiennent en sommant les probabilités conjointes des événements  $\mathcal{E}$  pour lesquels l'événement marginal a lieu (cf exemple précédent). Nous aurons donc pour  $t = 1, \dots, T$

$$\beta_i^t(k) \triangleq P\{O_k^t \cap \theta_i^t(k)\} = \sum_{\mathcal{E}} P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} \hat{\omega}_{it}(\mathcal{E}) \quad (4.61)$$

$$\beta_0^t(k) \triangleq P\{O_k^t \cap \theta_0^t(k)\} = \sum_{\mathcal{E}} P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} [1 - \delta_t(\mathcal{E})] \pi_t(\mathcal{E}) \quad (4.62)$$

$$\beta_{\bar{0}}^t(k) \triangleq P\{\bar{O}_k^t \cap \theta_0^t(k)\} = \sum_{\mathcal{E}} P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\} [1 - \delta_t(\mathcal{E})] [1 - \pi_t(\mathcal{E})] \quad (4.63)$$

Lorsque les probabilités marginales  $\beta_i^t(k)$  ( $i = \bar{0}, 0, \dots, m_k$ ) sont évaluées, les équations de mise à jour et de prédiction de l'état des cibles correspondent à celles du filtre IPDAF. Ceci constitue le schéma global de l'IJPDAF. La confirmation/terminaison des pistes peut être gérée par la procédure de décision basée sur le SPRT [DLL98] ou par d'autres méthodes à caractère plus heuristique [Li97a, LL97, LL98a, LL98b].

#### 4.3.8 Formulation concise des probabilités marginales d'associations

A première vue, l'évaluation des probabilités intégrées d'associations conjointes  $P\{\mathcal{E}|\mathbf{Z}^k\}$  exige de générer un ensemble très important de matrices d'associations. Cet ensemble contient nettement plus de matrices que celui auquel on a à faire dans la mise en œuvre d'un JPDAF classique. De ce point de vue, l'utilisation de l'IJPDAF paraît d'emblée très limitée du fait de son coût prohibitif en calculs surtout pour les applications denses en clutter et/ou en cibles. Bien que cette remarque soit parfaitement valable au premier abord, on doit garder en mémoire que seules les probabilités intégrées marginales  $\beta_i^t(k)$  interviennent en fait dans le processus de filtrage.

Comme nous le verrons l'expression théorique de ces probabilités peut heureusement se ramener à une formulation concise qui n'exige plus l'énumération exhaustive de tous les événements intégrés  $\mathcal{E}$  (et donc celle des matrices  $\hat{\Omega}^I(\mathcal{E})$ ) mais uniquement celle des événements d'associations (non intégrés)  $\Theta$ . En effet, avec quelques manipulations algébriques sur les expressions (4.61)-(4.63), on aboutit à la formulation suivante concise des probabilités marginales  $\beta_i^t(k)$  ( $i = \bar{0}, 0, 1, \dots, m_k$ )

$$\beta_i^t(k) = \sum_{\Theta} P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} P_{k|k-1,m_k}^{O^t} \prod_{j \neq t} [P_{k|k-1,m_k}^{O^j}]^{\delta_j(\Theta)} \hat{\omega}_{it}(\Theta) \quad (4.64)$$

$$\beta_0^t(k) = \sum_{\Theta} P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} P_{k|k-1,m_k}^{O^t} \prod_{j \neq t} [P_{k|k-1,m_k}^{O^j}]^{\delta_j(\Theta)} [1 - \delta_t(\Theta)] \quad (4.65)$$

$$\beta_{\bar{0}}^t(k) = \sum_{\Theta} P\{\Theta|\mathbf{Z}^k\} [1 - P_{k|k-1,m_k}^{O^t}] \prod_{j \neq t} [P_{k|k-1,m_k}^{O^j}]^{\delta_j(\Theta)} [1 - \delta_t(\Theta)] \quad (4.66)$$

Sous cette forme concise, on voit que le coût en calcul de l'IJPDAF est pratiquement équivalent à celui d'un JPDAF classique. Seul un faible surcoût sera dû à l'évaluation de la prédiction de la probabilité de perception des cibles. Ce surcoût est en fait dérisoire aussi bien en mémoire nécessaire qu'en temps de calcul. Notons aussi que les expressions théoriques finales (4.64)-(4.66) auxquelles on aboutit sont

parfaitement cohérentes avec celle du filtre JPDAF classique lorsque la probabilité de perception prédictive des cibles  $P_{k|k-1,m_k}^{O^j}$  tend vers 1.

### 4.3.9 Variantes possibles de l'IJPDAF

Dans le calcul précédent, nous avons toujours émis l'hypothèse que les états des cibles étaient mutuellement indépendants sachant les mesures disponibles. Cette hypothèse bien que souvent admise en pratique peut être supprimée et une formulation couplée de l'IJPDAF peut aisément être obtenue en adoptant la même démarche que celle de Bar-Shalom concernant le JPDACF (Joint Probabilistic Data Association Coupled Filter). Nous n'entrerons pas dans les détails de calculs de l'IJPDACP puisque cela n'apporte aucune innovation particulière à l'algorithme qui vient d'être présenté. Par ailleurs, il faut savoir que la prise en compte d'une information de reconnaissance de type amplitude par exemple peut aussi être introduite sans difficulté dans l'IJPDAF comme il a déjà été proposé en [LBS90a, Dez92, LL97]. Une version IJPDAMCF exploitant la modélisation de mesures multi-sources proposées dans le JPDAFMCF peut également être utilisée.

## 4.4 Pistage multi-cibles par MHT (1977)

L'approche **MHT** (Multiple Hypothesis Tracking) proposée par Donald B. Reid en 1977 [Rei77, Rei79a] est dans son principe une **extension de l'approche FBO** au cas multi-cibles. Le MHT est donc une **méthode bayésienne**. Elle est souvent considérée comme une version bayésienne récursive de la méthode de Morefield [Mor77] proposée à la même époque. Contrairement à l'approche JPDAF qui est une méthode bayésienne orientée sur les cibles (on essaie d'associer des mesures aux cibles existantes), le **MHT est une approche orientée sur les mesures**. Dans le MHT, on essaie d'associer aux mesures des cibles déjà existantes ou nouvelles. L'intérêt de cette approche réside essentiellement dans sa possibilité d'initialisation de nouvelles pistes. Comme nous le verrons, la mise en œuvre du MHT reste en théorie impossible sans certaines astuces d'implémentations qui lui enlève malheureusement son caractère optimal [PDBSW92].

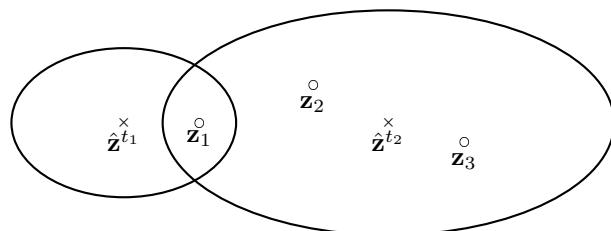
### 4.4.1 Principe général du MHT

Dans le MHT, on évalue la probabilité a posteriori pour que chaque mesure disponible provienne soit d'une fausse alarme, d'une cible existante ou éventuellement d'une nouvelle cible. **Le nombre de source n'est pas connu a priori**. Le principe du MHT consiste à générer un ensemble d'hypothèses (représenté par une **structure arborescente**) sur l'origine de chaque mesure disponible. La probabilité a posteriori de chaque hypothèse est calculée récursivement en tenant compte des détections manquantes, des fausses alertes et de l'apparition possible de nouvelles cibles. La mise à jour de chaque cible est faite

par pondération probabiliste des hypothèses pour lesquelles la cible considérée intervient.

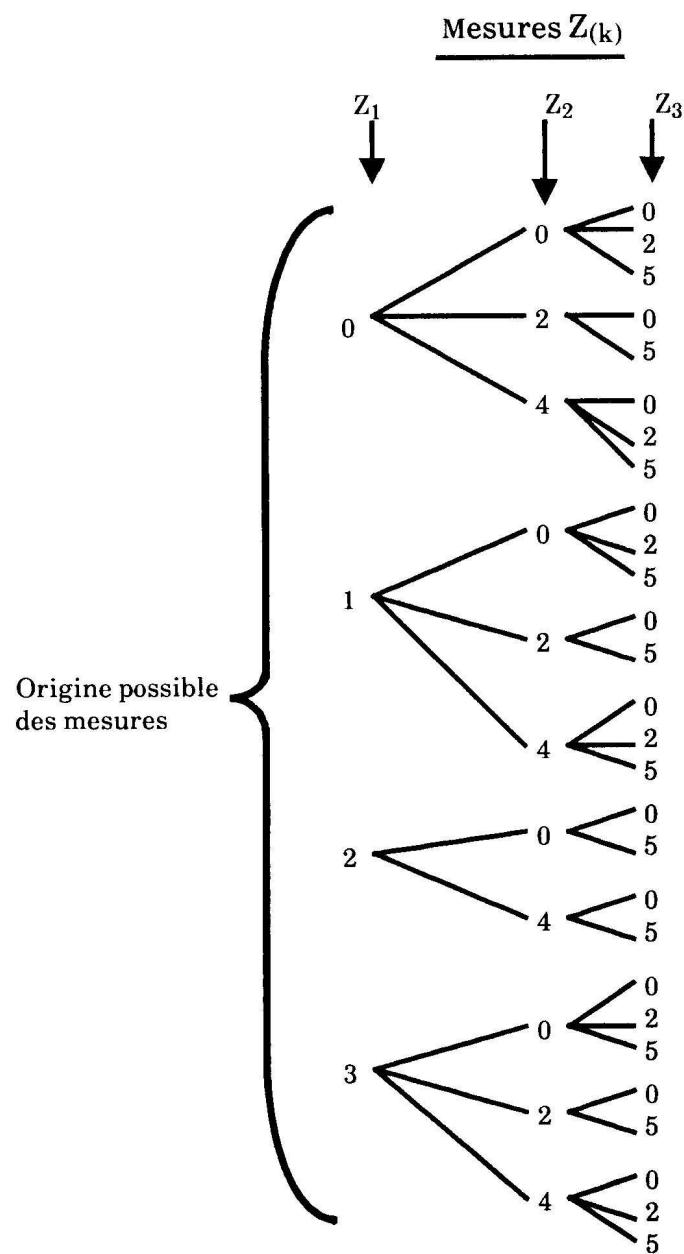
#### 4.4.2 Exemple

Considérons au scan  $k$ , 2 cibles interférentes et 3 mesures validées correspondant à la configuration suivante :



Les hypothèses sur l'origine des mesures sont représentées par la structure arborescente suivante :

Chaque nœud de l'arbre correspond à une origine possible de la mesure. L'index 0 correspond à l'origine FA. Cet arbre devra ensuite être étendu au scan  $k+1$  en générant de nouvelles hypothèses conjointes d'association et ainsi de suite. La taille de l'arbre (nombre de branches à générer) croît donc exponentiellement au cours du temps.



A l'instant  $k$  et pour cet arbre d'hypothèses, on peut faire correspondre la matrice suivante :

$\mathbf{z}_1$	$\mathbf{z}_2$	$\mathbf{z}_3$	No d'hypothèse
0	0	0	$h_1$
1	0	0	$h_2$
2	0	0	$h_3$
3	0	0	$h_4$
0	2	0	$h_5$
1	2	0	$h_6$
3	2	0	$h_7$
0	4	0	$h_8$
1	4	0	$h_9$
2	4	0	$h_{10}$
3	4	0	$h_{11}$
0	0	2	$h_{12}$
1	0	2	$h_{13}$
<b>M =</b>		3	$h_{14}$
0	4	2	$h_{15}$
1	4	2	$h_{16}$
3	4	2	$h_{17}$
0	0	5	$h_{18}$
1	0	5	$h_{19}$
2	0	5	$h_{20}$
3	0	5	$h_{21}$
0	2	5	$h_{22}$
1	2	5	$h_{23}$
3	2	5	$h_{24}$
0	4	5	$h_{25}$
1	4	5	$h_{26}$
2	4	5	$h_{27}$
3	4	5	$h_{28}$

Une valeur  $m_{ij}$  de cette matrice indique la nature de l'origine de la mesure  $\mathbf{z}_j$  sous l'hypothèse **conjointe** d'association  $h_i$ . Dans cet exemple très simple, on voit qu'il faut générer 28 hypothèses possibles d'associations conjointes qui décrivent les origines simultanées des 3 mesures validées. Bien que ce nombre d'hypothèses croisse exponentiellement avec les dimensions du problème, on voit que pour une cible particulière  $t$ , il existe un nombre restreint  $N_\theta^t$  de possibilités. Ainsi, on a :

- pour la mise à jour de  $t_1$  intervient les hypothèses suivantes :
  - $\theta_0^{t_1} : t_1$  n'est pas détectée
  - $\theta_1^{t_1} : t_1$  est associée à  $\mathbf{z}_1$  (au travers de  $h_2, h_6, h_9, h_{16}, h_{19}, h_{23}, h_{26}$ )
- pour la mise à jour de  $t_2$  intervient les hypothèses suivantes :
  - $\theta_0^{t_2} : t_2$  n'est pas détectée
  - $\theta_1^{t_2} : t_2$  est associée à  $\mathbf{z}_1$  (au travers de  $h_3, h_{10}, h_{20}, h_{27}$ )
  - $\theta_2^{t_2} : t_2$  est associée à  $\mathbf{z}_2$  (au travers de  $h_5, h_6, h_7, h_{22}, h_{23}, h_{24}$ )
  - $\theta_3^{t_2} : t_2$  est associée à  $\mathbf{z}_3$  (au travers de  $h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}$ )
- pour la mise à jour de  $t_3$  intervient les hypothèses suivantes :
  - $\theta_0^{t_3} : t_3$  n'est pas détectée
  - $\theta_1^{t_3} : t_3$  est associée à  $\mathbf{z}_1$  (au travers de  $h_4, h_7, h_{11}, h_{14}, h_{17}, h_{21}, h_{24}, h_{28}$ )
- etc ...

Supposons maintenant que l'on sache évaluer (ce calcul sera présenté dans la suite) les probabilités a posteriori conjointes d'associations  $P\{h_i|\mathbf{Z}^k\}$  ( $i = 1, \dots, 28$ ). Les probabilités **marginales d'associations** seront données par :

$$\boxed{P\{\theta_j^t|\mathbf{Z}^k\} = \sum_{h_i \in \theta_j^t} P\{h_i|\mathbf{Z}^k\}} \quad (4.67)$$

Pour la cible  $t_2$  de notre exemple, on aura donc

$$\begin{aligned} P\{\theta_1^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} &= P\{h_3|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{10}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{20}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{27}|\mathbf{Z}^k\} \\ P\{\theta_2^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} &= P\{h_5|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_6|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_7|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{22}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{23}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{24}|\mathbf{Z}^k\} \\ P\{\theta_3^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} &= P\{h_{12}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{13}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{14}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{15}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{16}|\mathbf{Z}^k\} + P\{h_{17}|\mathbf{Z}^k\} \\ P\{\theta_0^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} &= 1 - P\{\theta_1^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} - P\{\theta_2^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} - P\{\theta_3^{t_2}|\mathbf{Z}^k\} \end{aligned}$$

La mise à jour d'une cible  $t$  sera faite par pondération probabiliste ; c.à.d. par les équations

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}^t(k|k) = P\{\theta_0^t|\mathbf{Z}^k\}\hat{\mathbf{x}}^t(k|k-1) + \sum_{j=1}^{N_\theta^t} P\{\theta_j^t|\mathbf{Z}^k\}\hat{\mathbf{x}}_j^t(k|k)} \quad (4.68)$$

où l'égalité  $\hat{\mathbf{x}}_0^t(k|k) \equiv \hat{\mathbf{x}}^t(k|k-1)$  a été utilisée et où  $\hat{\mathbf{x}}_j^t(k|k)$  est l'estimée de la cible  $t$  obtenue par le filtre de Kalman et basée sur l'utilisation de la mesure relative à  $\theta_j^t$ .

La matrice de covariance associée s'écrira

$$\mathbf{P}^t(k|k) = \sum_{j=0}^{N_\theta^t} P\{\theta_j^t|\mathbf{Z}^k\} E[(\mathbf{x}^t(k) - \hat{\mathbf{x}}_j^t(k|k))(\mathbf{x}^t(k) - \hat{\mathbf{x}}_j^t(k|k))'| \mathbf{Z}^k] \quad (4.69)$$

En utilisant la même démarche que pour le PDAF, on obtient

$$\boxed{\mathbf{P}^t(k|k) = P\{\theta_0^t|\mathbf{Z}^k\}\mathbf{P}^t(k|k-1) + (1 - P\{\theta_0^t|\mathbf{Z}^k\})P_c^t(k|k) + \tilde{\mathbf{P}}^t(k)} \quad (4.70)$$

avec

$$\mathbf{P}^t(k) = \left[ \sum_{j=0}^{N_\theta^t} P\{\theta_j^t | \mathbf{Z}^k\} \hat{\mathbf{x}}_j^t(k|k) \hat{\mathbf{x}}_j^t(k|k)' \right] - \hat{\mathbf{x}}^t(k|k) \hat{\mathbf{x}}^t(k|k) \quad (4.71)$$

$$\mathbf{P}_c^t(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^t(k)\mathbf{H}^t(k)]\mathbf{P}^t(k|k-1) \quad (4.72)$$

#### 4.4.3 Construction de l'arbre des associations

Notons  $\Omega^k$  l'ensemble des hypothèses d'associations conjointes, appelé **arbre des associations**. Chaque branche de l'arbre  $\Omega^k$  décrit une séquence d'associations possibles de toutes les mesures disponibles jusqu'à l'instant courant  $k$ . On note

$$\Omega^k = \{\Omega_j^k\} \quad (4.73)$$

$\Omega_j^k$  représente une branche particulière de l'arbre d'associations. En théorie,  $\Omega^k$  est construit à partir de l'arbre précédent  $\Omega^{k-1}$  et des  $m_k$  mesures courantes validées

$$\mathbf{Z}(k) = \{\mathbf{z}_i(k)\}_{i=1}^{m_k} \quad (4.74)$$

Pour cela, on étend l'arbre  $\Omega^{k-1}$  en prolongeant ses branches avec les hypothèses d'origine possible pour  $\mathbf{z}_1(k)$ ; puis les branches de cet arbre sont à leur tour étendues avec les hypothèses d'origine possible pour  $\mathbf{z}_2(k)$ ; etc; jusqu'à la croissance complète qui se termine avec les hypothèses d'origine possible pour  $\mathbf{z}_{m_k}(k)$ . On dispose alors en théorie de l'arbre courant  $\Omega^k$ . Le **MHT exige une énumération exhaustive** de toutes les branches de l'arbre d'associations. Chaque branche est prolongée en supposant que chaque nouvelle mesure validée provient :

- soit d'une fausse alarme
- soit d'une cible existante
- soit d'une nouvelle cible

En pratique, un tel arbre ne peut être construit à cause du nombre exponentiellement croissant de ses branches. Une gestion des branches est donc nécessaire pour éviter l'explosion combinatoire du MHT. De ce fait, tout MHT mis en œuvre perd inévitablement la propriété d'optimalité du MHT théorique.

#### 4.4.4 Hypothèse d'associations conjointes courante

On désigne par  $\Theta(k)$  l'événement associé à une hypothèse d'associations conjointes **courante**. Chaque événement  $\Theta(k)$  décrit la réalisation d'une combinaison possible des mesures avec des sources possibles au temps courant. C'est en fait la réalisation du bout d'une branche particulière de  $\Omega^k$ . Chaque bout de branche  $\Theta(k)$  est constitué de

- $\tau$  mesures provenant des cibles existantes antérieurement

- $\phi$  mesures associées au clutter
- $\nu$  mesures émanant de nouvelles cibles

Pour chaque hypothèse courante  $\Theta(k)$ , on définit alors les indicateurs suivants :

$$\tau_i = \tau_i[\Theta(k)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{z}_i(k) \text{ est associé à une cible existante} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.75)$$

$$\nu_i = \nu_i[\Theta(k)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{z}_i(k) \text{ est associé à une nouvelle cible} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.76)$$

$$\delta_t = \delta_t[\Theta(k)] = \begin{cases} 1 & \text{si la cible } t \text{ présente en } \Omega^{k-1} \text{ est détectée au scan } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.77)$$

Avec ces indicateurs, on définit alors

- **Le nombre de pistes prolongées dans  $\Theta(k)$**

$$\boxed{\tau[\Theta(k)] = \sum_{i=1}^{m_k} \tau_i[\Theta(k)]} \quad (4.78)$$

- **Le nombre de nouvelle pistes dans  $\Theta(k)$**

$$\boxed{\nu[\Theta(k)] = \sum_{i=1}^{m_k} \nu_i[\Theta(k)]} \quad (4.79)$$

- **Le nombre de fausses mesures dans  $\Theta(k)$**

$$\boxed{\phi[\Theta(k)] = m_k - \tau[\Theta(k)] - \nu[\Theta(k)]} \quad (4.80)$$

L'événement d'association courant  $\Theta(k)$  est donc constitué des événements :

$$\boxed{\Theta(k)] = \{\Theta_T(k), \Theta_N(k), \Theta_F(k)\}} \quad (4.81)$$

avec

- $\Theta_T(k)$  qui représente les associations avec les cibles existantes

$$\boxed{\Theta_T(k) \triangleq \bigcap_{i:\tau_i=1} \theta_i^{t_i}(k)} \quad (4.82)$$

où  $t_i$  désigne l'index de la cible existante associée à la mesure  $\mathbf{z}_i(k)$

- $\Theta_N(k)$  qui représente les associations avec les cibles nouvelles

$$\boxed{\Theta_N(k) \triangleq \bigcap_{i:\nu_i=1} \theta_i^{n_i}(k)} \quad (4.83)$$

où  $n_i$  désigne l'index de la nouvelle cible associée à la mesure  $\mathbf{z}_i(k)$

- $\Theta_F(k)$  qui représente les associations avec les fausses alarmes

$$\boxed{\Theta_F(k) \triangleq \bigcap_{i:\tau_i+\nu_i=0} \theta_i^0(k)} \quad (4.84)$$

où  $t = 0$  désigne l'index de la source fausses alarmes.

#### 4.4.5 Hypothèse d'associations conjointes cumulées

On désigne maintenant par  $\Theta^{k,l}$  l'évènement lié à la réalisation d'une hypothèse d'associations conjointes cumulées ; c'est à dire à la **réalisation d'une branche complète** de l'arbre  $\Omega^k$ . Cet évènement peut être décomposé sous la forme

$$\boxed{\Theta^{k,l} = \{\Theta^{k-1,s}, \Theta(k)\}} \quad (4.85)$$

#### 4.4.6 Probabilité a posteriori d'associations conjointes cumulées

La probabilité a posteriori d'une **branche complète** de l'arbre  $\Omega^k$ , c'est à dire de l'évènement d'associations conjointes cumulées  $\Theta^{k,l}$  est obtenue par la règle de Bayes

$$\begin{aligned} \beta^{k,l} &\triangleq P\{\Theta^{k,l} | \mathbf{Z}^k\} = P\{\Theta^{k-1,s}, \Theta(k) | \mathbf{Z}(k), \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{c} p[\mathbf{Z}(k) | \Theta(k), \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\Theta(k) | \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}\} P\{\Theta^{k-1,s} | \mathbf{Z}^{k-1}\} \end{aligned}$$

- La **vraisemblance de l'évènement courant** s'exprime

$$\begin{aligned} p[\mathbf{Z}(k) | \Theta(k), \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}] &= \prod_{i=1}^{m_k} \{e_{t_i}[\mathbf{z}_i(k)]\}^{\tau_i[\Theta(k)]} V^{-(1-\tau_i[\Theta(k)])} \\ &= \frac{1}{V^{\phi[\Theta(k)]+\nu[\Theta(k)]}} \prod_{i=1}^{m_k} \{e_{t_i}[\mathbf{z}_i(k)]\}^{\tau_i[\Theta(k)]} \end{aligned}$$

- La **probabilité a priori** de l'évènement courant  $\Theta(k)$  se décompose selon

$$\begin{aligned} P\{\Theta(k) | \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}\} &\equiv P\{\Theta(k), \delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta] | \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= P\{\Theta(k) | \delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta], \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}\} P\{\delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta] | \Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}\} \\ &= P\{\Theta(k) | \delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta]\} P\{\delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta]\} \end{aligned}$$

où  $\delta[\Theta]$  est le vecteur des indicateurs de détection des cibles existantes dans  $\Theta(k)$ .

- Le nombre d'évènements ayant le même nombre de détections de cibles existantes  $\tau$  et de cibles nouvelles  $\nu$  est donné par
  - le nombre de permutations possibles de  $\tau = m_k - \phi - \nu$  mesures prises parmi les  $m_k$  disponibles et multiplié par
  - le nombre de choix possibles de  $\nu$  mesures prises parmi  $\phi + \nu$

En supposant toutes ces combinaisons équiprobables, on obtient

$$P\{\Theta(k)|\delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta]\} = \left[ \frac{m_k!}{(m_k - \tau[\Theta])!} \times \frac{(\phi[\Theta] + \nu[\Theta])!}{\phi[\Theta]!\nu[\Theta]!} \right]^{-1} = \frac{\phi[\Theta]!\nu[\Theta]!}{m_k!} \quad (4.86)$$

- La probabilité  $P\{\delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta]\}$  vaut

$$P\{\delta[\Theta], \phi[\Theta], \nu[\Theta]\} = \mu_F(\phi[\Theta])\mu_N(\nu[\Theta]) \prod_t [P_d^t]^{\delta_t[\Theta]} [1 - P_d^t]^{1 - \delta_t[\Theta]} \quad (4.87)$$

où  $\mu_F$  et  $\mu_N$  sont les masses de probabilités du nombre de fausses mesures et du nombre de nouvelles cibles respectivement. On suppose généralement que ces masses suivent des lois de Poisson de densité  $\lambda_F$  et  $\lambda_N$ .

En combinant ces expressions, on obtient donc la **probabilité a priori** suivante

$$P\{\Theta(k)|\Theta^{k-1,s}, \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{\phi[\Theta]!\nu[\Theta]!}{m_k!} \mu_F(\phi[\Theta])\mu_N(\nu[\Theta]) \prod_t [P_d^t]^{\delta_t[\Theta]} [1 - P_d^t]^{1 - \delta_t[\Theta]} \quad (4.88)$$

La probabilité a posteriori d'une branche d'associations possible est donc finalement obtenue **récursivement** par la formule

$$\begin{aligned} \beta^{k,l} &\triangleq P\{\Theta^{k,l}|\mathbf{Z}^k\} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\phi[\Theta]!\nu[\Theta]!}{m_k!} \frac{\mu_F(\phi[\Theta])\mu_N(\nu[\Theta])}{V^{\phi[\Theta(k)]+\nu[\Theta(k)]}} \prod_{i=1}^{m_k} \{e_{t_i}[\mathbf{z}_i(k)]\}^{\tau_i[\Theta(k)]} \prod_t [P_d^t]^{\delta_t[\Theta]} [1 - P_d^t]^{1 - \delta_t[\Theta]} \times P\{\Theta^{k-1,s}|\mathbf{Z}^{k-1}\} \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante de normalisation.

La branche **la plus probable** est celle dont la probabilité  $P\{\Theta^{k,l}|\mathbf{Z}^k\}$  est maximale. Pour la connaître il nous faut donc **générer la liste exhaustive** de toutes les branches possibles de l'arbre d'associations.

#### 4.4.7 Forme de l'estimateur

La mise à jour de l'état de chaque cible est donnée **en théorie** par la pondération probabiliste des estimées conditionnées par **les branches possibles** d'associations. Ceci a été présenté dans l'exemple précédent.

En pratique cependant, pour limiter la combinatoire du MHT, on peut utiliser uniquement que la branche la plus probable pour mettre à jour les pistes, ou bien effectuer une pondération probabiliste tronquée (et renormalisée) des estimées conditionnelles. Cette étape délicate est souvent basée sur un savoir faire du développeur. Les règles de fusion de branches et d'éliminations des branches improbables sont propres à chaque système de poursuite MHT.

#### 4.4.8 En résumé

En théorie, les étapes d'un cycle du MHT sont les suivantes :

- On dispose d'un arbre d'hypothèses au temps  $k - 1$  et des prédictions des états de cibles existantes
- Au temps  $k$ , on reçoit  $m_k$  mesures validées
- On étend l'arbre des hypothèses d'associations en prolongeant les branches avec les hypothèses possibles sur l'origine des mesures validées
- On évalue la probabilité a posteriori de réalisation de **chaque branche** (enumération exhaustive coûteuse)
- On calcule les probabilités marginales d'associations relativement à chaque cible
- On met à jour les états des cibles par pondération probabiliste
- On prédit l'état des cibles à l'instant  $k + 1$

En pratique, pour limiter la combinatoire du MHT, on sépare d'abord les cibles en **clusters indépendants** ; puis on utilise un MHT pour chaque cluster. Cette technique ne suffit pas à limiter la combinatoire. On est donc amené à [Rei79a, PS83]

- éliminer (**pruning**) les branches ayant une probabilité d'occurrence négligeable
- combiner (**merging**) les branches ayant conduit au même nombre de cibles pistées avec des estimées comparables

Généralement le résultat présenté concerne celui obtenu avec l'hypothèse d'associations la plus probable. Ce résultat n'est pas forcément hélas celui correspondant à la réalité ... On peut aussi adopter la présentation décrite en [BB89]. Dans les environnements très denses, seul le pistage par MHT des clusters de cibles reste possible. Cette approche est présentée en [DBP90].

#### 4.4.9 Avantages du MHT

- prise en compte de cibles multiples en nombre inconnu
- prise en compte des fausses alarmes
- initialisation des nouvelles cibles détectées
- calcul récursif des probabilités d'associations conjointes cumulées

#### 4.4.10 Inconvénients du MHT

- le nombre d'hypothèses à gérer croît exponentiellement au cours du temps
- le MHT théorique n'est pas exploitable
- on doit utiliser des heuristiques de gestion d'hypothèses pour limiter la combinatoire
- le MHT mis en œuvre en pratique perd donc son caractère d'optimalité
- la mise en œuvre d'un MHT opérationnel est très difficile et délicate [Bla86]

## 4.5 Pistage multi-cibles par PMHT (1995)

Les algorithmes proposés précédemment (JPDAF, MHT) utilisent une énumération exhaustive de toutes les associations possibles des mesures aux pistes. On est alors confronté à un problème d'explosion combinatoire qui se résout par élimination des séquences les moins probables (principe d'élagage des branches pour le MHT et/ou de la recombinaison O-scan back du JPDAF). La méthode **PMHT** (Probabilistic Multi-Hypothesis Tracking) proposée en 1995 par R. Streit et T. Luginbuhl [SL93, SL94a, SL95] permet d'éviter l'énumération exhaustive des hypothèses d'associations conjointes possibles.

L'idée principale du PMHT consiste à **modéliser les associations (assignations) comme des variables aléatoires**. Les mesures ne sont plus associées à des pistes précises, mais simultanément à toutes les sources avec des probabilités estimées au moyen de l'algorithme **EM** (Expectation Maximization) de Dempster [DLR77].

Contrairement au JPDAF et au MHT, le **PMHT** est une méthode de poursuite de type batch et non temps réel. On doit en effet stocker les mesures obtenues pendant plusieurs scans avant de pouvoir mettre en œuvre le PMHT. La présentation du PMHT faite ici est basée principalement sur [Gau97].

### 4.5.1 Formulation du problème

On fixe à  $K$  la **durée du batch** (le nombre de scans à mémoriser) et **on suppose qu'il existe  $M$  sources** présentes. Ce nombre  $M$  n'est pas restrictif et un modèle particulier de source pourra correspondre aux fausses alarmes comme on le verra. L'évolution de chaque cible  $t$  est modélisée par un processus de Markov qui est exprimé en temps discret sous la forme classique

$$\boxed{\mathbf{x}^t(k+1) = \mathbf{f}^t[\mathbf{x}^t(k), \mathbf{v}^t(k)] \quad k = 1, \dots, K} \quad (4.89)$$

où  $\mathbf{v}^t(k)$  est un bruit blanc gaussien centré de covariance  $\mathbf{Q}^t(k)$ . La mesure associée à la cible  $t$  s'écrit

$$\boxed{\mathbf{z}^t(k) = \mathbf{h}^t[\mathbf{x}^t(k), \mathbf{w}^t(k)] \quad k = 1, \dots, K} \quad (4.90)$$

où  $\mathbf{w}^t(k)$  est un bruit blanc gaussien centré de covariance  $\mathbf{R}^t(k)$ . En pratique, à chaque scan, on dispose d'un ensemble de  $m_k$  mesures validées  $\mathbf{Z}(k) = \{\mathbf{z}_1(k), \dots, \mathbf{z}_{m_k}(k)\}$ . La mesure  $\mathbf{z}^t(k)$  de la cible  $t$  peut appartenir à  $\mathbf{Z}(k)$  si la cible est détectée au scan  $k$ . La taille  $m_k$  de  $\mathbf{Z}(k)$  varie d'un scan à l'autre. On note  $\mathbf{Z}^K$  l'ensemble des mesures cumulées et validées depuis  $k = 1$  à  $K$ ,

$$\mathbf{Z}^K = (\mathbf{Z}(1), \dots, \mathbf{Z}(K)) \quad (4.91)$$

Le vecteur cumulé des états des  $M$  sources est noté

$$\mathbf{X}^K = (\mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(K)) \quad (4.92)$$

où  $\mathbf{X}(k) = (\mathbf{x}_1(k), \dots, \mathbf{x}_M(k))$  désigne l'ensemble des états des sources au scan  $k$ .

Afin de pouvoir prendre en compte l'incertitude sur l'origine des mesures, on définit le vecteur cumulé  $\Theta^K$  d'une combinaison des associations conjointes possibles sur la longueur du batch,

$$\Theta^K = (\Theta(1), \dots, \Theta(K)) \quad (4.93)$$

où  $\Theta(k) = (\theta_1(k), \dots, \theta_{m_k}(k))$  désigne une hypothèse d'associations conjointes possible sur l'origine des mesures disponibles pour le scan  $k$ .  $\theta_j(k) = i$  caractérise l'association du type : la  $j$ ième mesure au scan  $k$  est associée à la source no  $i$ .

Une **piste** notée  $\tau_i^K$ , définie jusqu'à l'instant  $K$ , est une séquence de mesures associées à une **même source  $i$**  ; c'est à dire

$$\boxed{\tau_i^K = \{\mathbf{z}_j(k) | \theta_j(k) = i, \quad 1 \leq k \leq K \quad 1 < i \leq M\}} \quad (4.94)$$

Une telle définition de piste prend en compte les détections manquantes possibles d'une source. Comme un modèle de source correspond aux fausses alarmes, on a une *piste* particulière de type fausse alarme.

Une **partition**  $\mathcal{P}$  des mesures en pistes est définie comme un ensemble possible de **pistes non vides**, i.e.

$$\boxed{\mathcal{P}^K \triangleq \{\tau_i^K | \tau_i^K \neq \emptyset\}} \quad (4.95)$$

Chaque partition correspond en fait à une certaine hypothèse d'associations conjointes cumulées de  $\mathbf{Z}^K$ .

Le problème général de l'association consiste à trouver la partition possible **la plus probable**. Dans les algorithmes précédents, on utilisait une énumération exhaustive des partitions possibles soit avec une mémoire minimale 0-scan back (JPDAF) ou maximale (MHT) et l'évaluation récursive des probabilités des partitions générées. La méthode PMHT de Streit et Luginbuhl évite l'énumération exhaustive des partitions en assignant **toutes les mesures à toutes les sources** avec une pondération probabiliste empirique. Le vecteur d'assignation inconnu  $\Theta^K$  est considéré dans le PMHT comme un **vecteur aléatoire** que l'on cherchera à estimer.

Le problème de base à résoudre est donc le suivant :

**Comment estimer  $\mathbf{X}^K$  à partir de  $\mathbf{Z}^K$  quant on ne connaît pas  $\Theta^K$  ?**

L'idée originale proposée en [SL95] consiste à estimer **simultanément le vecteur des états cumulés  $\mathbf{X}^K$  et les probabilités d'assignation  $\Pi^K$**  des mesures aux sources. On note  $\Phi^K$  le vecteur des

paramètres  $\mathbf{X}^K$  et  $\Pi^K$  à estimer.  $\Phi^K$  constitue les données complètes du problème de l'extraction multi-pistes (EMP).

$$\boxed{\Phi^K \triangleq (\mathbf{X}^K, \Pi^K) = (\Phi(1), \dots, \Phi(K))} \quad (4.96)$$

où  $\Phi(k) \triangleq (\mathbf{X}(k), \Pi(k))$  représente les paramètres à estimer au scan  $k$  avec

$$\Pi(k) \triangleq (\pi_1(k), \dots, \pi_M(k)) \quad (4.97)$$

La notation  $\pi_i(k)$  désigne la probabilité a priori d'associer une mesure au modèle de source  $i$ .

Le problème fondamental à résoudre consiste donc à estimer  $\Phi^K$  à partir des mesures disponibles cumulées  $\mathbf{Z}^K$ . Nous verrons comment le PMHT apporte une solution à ce problème.

#### 4.5.2 Hypothèses du PMHT

On précise ici les hypothèses et les contraintes liées à la méthode. On rappelle d'abord que dans les approches probabilistes traditionnelles (JPDAF et MHT), on utilisait les contraintes suivantes pour la génération des hypothèses d'associations :

- (C1) : **chaque mesure provient soit d'une piste soit d'une fausse alarme** (pas de mesure multi-sources [MCTW86]). Ceci implique que les associations doivent être exclusives et exhaustives, c.à.d

$$\bigcup_{i=1}^p \tau_i^K = \mathbf{Z}^K \quad (4.98)$$

avec la contrainte pour  $\forall i \neq j$  et  $i, j = 1, \dots, p$

$$\tau_i^K \cap \tau_j^K = \emptyset \quad (4.99)$$

où  $p \leq M$  est le nombre de pistes d'une partition quelconque  $\mathcal{P}^K$ . Cette contrainte implique d'avoir pour les probabilités des variables d'affectations

$$\boxed{\sum_{i=1}^M P\{\theta_j(k) = i\} \equiv \sum_{i=1}^M \pi_i(k) = 1} \quad (4.100)$$

Les probabilités  $\pi_i(k)$  sont inconnues et font partie du vecteur  $\Phi(k)$  à estimer.

- (C2) : **chaque source (cible et/ou FA) génère au plus une mesure** (pas de source étendue ou de trajets multiples). Cette contrainte implique d'avoir pour  $k = 1, \dots, K$  et  $j, j' = 1, \dots, m_k$  avec  $j \neq j'$ ,

$$\theta_j(k) = i \Rightarrow \theta_{j'}(k) \neq i \quad i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.101)$$

Pour le PMHT, le fait d'introduire l'association des données dans le problème même d'estimation revient en fait à **relâcher la deuxième contrainte** (C2). On suppose que certaines mesures peuvent

provenir de la même source (en particulier du clutter). A la limite, toutes les mesures peuvent très bien être associées à une source unique. Cette possibilité du PMHT est originale et tout à fait réaliste car une source peut en pratique être à l'origine de plusieurs mesures (cas des cibles étendues, des trajets multiples, etc). On prend de ce fait en compte beaucoup plus d'hypothèses d'associations que dans les approches bayésiennes classiques du JPDAF et du MHT.

Pour le développement du PMHT, les auteurs supposent cependant que les probabilités  $\pi_i(k)$  sont

- (H 1) : **indépendantes de la valeur des mesures**, c.à.d.

$$\boxed{\pi_i(k) \triangleq P\{\theta_j(k) = i\} \quad \forall j = 1, \dots, m_k} \quad (4.102)$$

- (H 2) : **indépendantes entre elles**, c.à.d.

$$\boxed{P\{\Theta(k)\} = \prod_{j=1}^{m_k} P\{\theta_j(k)\}} \quad (4.103)$$

### Remarque importante

Ces hypothèses (discutables), se justifient uniquement par leur nécessité à la mise en œuvre de l'algorithme EM qui servira à l'estimation des données complètes  $\Phi^K = (\mathbf{X}^K, \Pi^K)$  à partir des données incomplètes  $\mathbf{Z}^K$ . C'est là qu'intervient l'**empirisme de la méthode du PMHT**.

On suppose aussi que

- (H 3) : les affectations des mesures  $\Theta(k)$  et les vecteurs d'état des sources  $\mathbf{X}(k)$  sont indépendants
- (H 4) : les états des différentes sources sont indépendants entre eux

### Analogie avec l'estimation des paramètres de mélange de densités

Avec ces hypothèses, la fonction de vraisemblance du paramètre  $\Phi^K$  basée sur les données incomplètes s'écrit

$$p(\mathbf{Z}^K | \Phi^K) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{Z}(k) | \Phi(k)) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{Z}(k) | \mathbf{X}(k), \Pi(k)) \quad (4.104)$$

$$= \prod_{k=1}^K \sum_{\Theta(k)} p(\mathbf{Z}(k) | \mathbf{X}(k), \Pi(k), \Theta(k)) P\{\Theta(k) | \mathbf{X}(k), \Pi(k)\} \quad (4.105)$$

$$= \prod_{k=1}^K \sum_{\Theta(k)} \prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{X}(k), \Pi(k)) P\{\theta_j(k)\} \quad (4.106)$$

$$= \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} \sum_{\theta_j=1}^M p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{X}(k), \theta_j(k)) P\{\theta_j(k)\} \quad (4.107)$$

$$= \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} \sum_{i=1}^M p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k)) \pi_i(k) \quad (4.108)$$

Les relations (4.104) et (4.105) proviennent du théorème des probabilités totales et de la règle de Bayes. La relation (4.106) provient de l'hypothèse d'indépendance des variables  $\theta_j(k)$ . Cette relation traduit le fait que toute mesure peut être affectée à l'une des sources sans tenir compte des mesures préalablement affectées. La relation (4.107) provient d'une simple factorisation et du fait que chaque  $\theta_j(k)$  décrit le même ensemble.

Avec cette décomposition, on voit clairement que **la densité de probabilité de chaque mesure s'exprime comme un mélange des  $M$  densités associées à chaque modèle de source**. Le problème à résoudre (estimer  $\Phi^K$  à partir de  $\mathbf{Z}^K$ ) est donc strictement équivalent au problème de l'estimation de paramètres d'une **loi de mélange de densités** où de nombreuses méthodes de résolution sont disponibles [TSM85]. L'algorithme EM (Expectation-Maximization) que nous allons présenter est la méthode adoptée par Streit et Luginbuhl pour résoudre ce problème et développer le PMHT. Le choix de la méthode EM est justifié car cet algorithme est bien adapté à l'estimation de paramètres lorsque la fonction de vraisemblance est délicate à évaluer et/ou lorsque son optimisation est difficile.

#### 4.5.3 Présentation de l'algorithme EM

L'algorithme **EM (Expectation-Maximization)** proposé par Dempster, Laird et Rubin en [DLR77, Lai93, FH93] peut être considéré comme un cas particulier de la méthode ICE (**Iterative Conditional Estimation**) proposée récemment par Pieczynski en [Pie92, Pie95] dans le cas particulier où les densités de probabilité appartiennent à la famille des exponentielles [Del97]. Nous rappelons ici brièvement le principe de cette méthode et donnons un exemple de son application au cas de l'estimation de paramètres de mélange (mixture) de densités [Sun76, RW84]. L'étude de la convergence de l'algorithme EM est présentée en [Wu83].

Considérons deux espaces  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Z}$  et une application de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{Z}$ . On note

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}\} \quad (4.109)$$

On note  $p(\mathbf{z}|\Phi)$  la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{z}$  sachant  $\Phi$  et  $p(\mathbf{x}|\Phi)$  la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{x}$  sachant  $\Phi$ . Le problème consiste à estimer le paramètre inconnu  $\Phi$  au sens du maximum de vraisemblance à partir des observations  $\mathbf{z}$  avec  $\Phi$  de la forme

$$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_M) \in \Omega \subset \text{IR}^M \quad (4.110)$$

On suppose que l'on ne peut pas accéder directement à  $\mathbf{x}$ . Ceci correspond à de nombreux problèmes physiques où des données sont manquantes. On qualifie  $\mathbf{x}$  de **données complètes** et  $\mathbf{z}$  de **données**

**incomplètes.** Ces données sont reliées par la relation

$$p(\mathbf{z}|\Phi) = \int_{\mathcal{X}(\mathbf{z})} p(\mathbf{x}|\Phi) d\mathbf{x} \quad (4.111)$$

D'autre part, puisque  $\mathbf{z}$  est une fonction de  $\mathbf{x}$ , on a

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\Phi) \equiv p(\mathbf{x}|\Phi) \quad (4.112)$$

Compte tenu de cette remarque, la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{x}$  sachant  $\mathbf{z}$  et  $\Phi$  qui représente la densité de probabilité des *données manquantes* s'écrit

$$\boxed{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \Phi) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\Phi)}{p(\mathbf{z}|\Phi)} \equiv \frac{p(\mathbf{x}|\Phi)}{p(\mathbf{z}|\Phi)}} \quad (4.113)$$

En théorie l'estimée  $\hat{\Phi}$  au sens du maximum de vraisemblance est obtenue en maximisant la valeur de la densité des données complètes  $p(\mathbf{x}|\Phi)$ . Mais ici, on dispose pas de cette densité mais uniquement de  $p(\mathbf{z}|\Phi)$ . L'idée de l'algorithme EM consiste à approcher le maximum de vraisemblance

- en estimant itérativement l'espérance conditionnelle de  $p(\mathbf{x}|\Phi)$  à partir des données incomplètes  $\mathbf{z}$  et d'une estimée antérieure  $\hat{\Phi}^r$
- en maximisant la valeur de cette espérance par rapport aux paramètres de  $\Phi$  pour obtenir une meilleure estimée  $\hat{\Phi}^{r+1}$ .

Ce processus itératif est mené jusqu'à la convergence de l'estimée cherchée  $\hat{\Phi}$ . Nous détaillons maintenant les 2 étapes de l'algorithme.

#### • Etape E : Expectation

A partir des paramètres estimés  $\hat{\Phi}^r$  à l'itération précédente, on calcule l'espérance de la log-vraisemblance conditionnée par la mesure  $\mathbf{z}$  qui s'exprime

$$\boxed{Q(\Phi|\hat{\Phi}^r) \triangleq E[\log[p(\mathbf{x}|\Phi)]|\mathbf{z}, \hat{\Phi}^r] = L(\Phi) + H(\Phi|\hat{\Phi}^r)} \quad (4.114)$$

avec

$$L(\Phi) = \log[p(\mathbf{z}|\Phi)]$$

$$H(\Phi|\hat{\Phi}^r) = E[\log[p(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \Phi)]|\mathbf{z}, \hat{\Phi}^r]$$

#### • Etape M : Maximization

On maximise  $Q(\Phi|\hat{\Phi}^r)$  afin d'affiner notre estimation du vecteur de paramètres  $\Phi$  pour l'itération suivante

$$\boxed{\hat{\Phi}^{r+1} = \arg \max_{\Phi} Q(\Phi|\hat{\Phi}^r)} \quad (4.115)$$

#### 4.5.4 Interprétation de l'algorithme EM

Ne connaissant pas la fonction de vraisemblance  $p(\mathbf{x}|\Phi)$  des données complètes, on l'estime (en fait sa log-vraisemblance) à partir des observations  $\mathbf{z}$  et des paramètres estimés  $\hat{\Phi}^r$  disponibles à l'itération  $r$ . On peut montrer qu'en combinant ces deux étapes et avec l'inégalité de Jansen que la fonction log-vraisemblance  $L(\Phi) = \log(p(\mathbf{z}|\Phi))$  est croissante [DLR77] ; ce qui assure la convergence vers des points stationnaires.

#### 4.5.5 Application de l'algorithme EM aux lois de mélange

On présente succinctement l'utilisation de l'algorithme EM pour l'estimation des paramètres de mixtures de densités [RW84]. Cette utilisation de l'algorithme sert de base à la méthode PMHT qui sera présentée plus loin.

On désigne par  $\mathbf{X}$  les données complètes et par  $\mathbf{Z}$  les données incomplètes du problème. On dispose de  $m_k$  mesures indépendantes  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m_k}\}$ . Chacune de ces mesures appartient à une famille paramétrée de densité de probabilité de la forme générale

$$\boxed{p(\mathbf{z}_j|\Phi) = \sum_{i=1}^M \pi_i p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)} \quad (4.116)$$

où chaque  $\pi_i$  est un coefficient de pondération positif ou nul vérifiant la contrainte

$$\boxed{\sum_{i=1}^M \pi_i = 1} \quad (4.117)$$

Chaque densité  $p_i(\cdot)$  est une densité de probabilité paramétrée par  $\phi_i$ . En d'autres termes, chaque mesure  $\mathbf{z}_j$  peut provenir d'une des  $M$  densités  $p_i$  avec une probabilité  $\pi_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Le vecteur  $\Phi$  des paramètres à estimer ici correspond à

$$\boxed{\Phi \triangleq (\pi_1, \dots, \pi_M, \phi_1, \dots, \phi_M)} \quad (4.118)$$

En **supposant les mesures indépendantes entre elles**, la vraisemblance et la log-vraisemblance de  $\Phi$  sachant les données incomplètes  $\mathbf{Z}$  s'écrivent

$$p(\mathbf{Z}|\Phi) = \prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j|\Phi) = \prod_{j=1}^{m_k} \sum_{i=1}^M \pi_i p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i) \quad (4.119)$$

$$L(\Phi) = \log[p(\mathbf{Z}|\Phi)] = \log \left[ \prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j|\Phi) \right] = \sum_{j=1}^{m_k} \log \left[ \sum_{i=1}^M \pi_i p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i) \right] \quad (4.120)$$

Pour mettre en œuvre les itérations E et M de l'algorithme, on doit introduire la densité  $p(\mathbf{X}|\mathbf{Z}, \Phi)$  où  $\mathbf{X} \triangleq (\mathbf{Z}, \Theta) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m_k})$ . Chaque donnée complète  $\mathbf{x}_j$  est définie par le couple  $(\mathbf{z}_j, \theta_j)$ . les  $\theta_j$  sont

les **données manquantes** du problème qui prennent leur valeur dans  $\{1, \dots, M\}$ . Chaque  $\theta_j$  indique le type de la densité d'où provient la mesure  $\mathbf{z}_j$ . Dans cet exemple, le vecteur des données complètes  $\mathbf{X}$  est un **vecteur hybride** dont les composantes prennent à la fois des valeurs continues et discrètes. La probabilité des données manquantes, en **supposant les  $\theta_j$  indépendants entre eux** s'exprime

$$\boxed{P\{\Theta|\Phi\} = P\{\theta_1, \dots, \theta_{m_k}|\Phi\} = \prod_{j=1}^{m_k} P\{\theta_j|\Phi\} = \prod_{j=1}^{m_k} \pi_{\theta_j}} \quad (4.121)$$

En utilisant la règle de Bayes, on peut écrire

$$p[\mathbf{X}|\Phi] = p[\mathbf{Z}, \Theta|\Phi] = P\{\Theta|\mathbf{Z}, \Phi\}p(\mathbf{Z}|\Phi) \equiv p(\mathbf{Z}|\Theta, \Phi)P\{\Theta|\Phi\} = \prod_{j=1}^{m_k} p_{\theta_j}(\mathbf{z}_j|\phi_{\theta_j})\pi_{\theta_j} \quad (4.122)$$

La densité  $p[\mathbf{X}|\mathbf{Z}, \Phi]$  intervenant dans l'étape E s'écrit alors d'après (4.113) et avec (4.122)

$$p[\mathbf{X}|\mathbf{Z}, \Phi] = \frac{p[\mathbf{X}|\Phi]}{p(\mathbf{Z}|\Phi)} = \frac{P\{\Theta|\mathbf{Z}, \Phi\}P(\mathbf{Z}|\Phi)}{p(\mathbf{Z}|\Phi)} = P\{\Theta|\mathbf{Z}, \Phi\} = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} p_{\theta_j}(\mathbf{z}_j|\phi_{\theta_j})\pi_{\theta_j}}{\prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j|\Phi)} = \prod_{j=1}^{m_k} \frac{p_{\theta_j}(\mathbf{z}_j|\phi_{\theta_j})\pi_{\theta_j}}{p(\mathbf{z}_j|\Phi)} \quad (4.123)$$

#### • Etape E : Expectation

Supposons disposer de  $\hat{\Phi}^r$  à l'itération antérieure  $r$ , et calculons maintenant l'expression de  $Q(\Phi|\hat{\Phi}^r)$  pour l'itération courante  $r + 1$

$$Q(\Phi|\hat{\Phi}^r) = E[\log[p[\mathbf{X}|\Phi]]|\mathbf{Z}, \hat{\Phi}^r] = \sum_{\Theta} P\{\Theta|\mathbf{Z}, \hat{\Phi}^r\} \log[p[\mathbf{X}|\Phi]] \quad (4.124)$$

$$= \sum_{\theta_1=1}^M \dots \sum_{\theta_{m_k}=1}^M \left[ \prod_{j'=1}^{m_k} \frac{\hat{\pi}_{\theta_{j'}}^r p_{\theta_{j'}}(\mathbf{z}_{j'}|\hat{\phi}_{\theta_{j'}}^r)}{p(\mathbf{z}_{j'}|\hat{\Phi}^r)} \right] \left[ \sum_{j=1}^{m_k} \log[\pi_{\theta_j} p_{\theta_j}(\mathbf{z}_j|\phi_{\theta_j})] \right] \quad (4.125)$$

En considérant les  $m_k$  sommes sur un des éléments de l'expression entre crochets et en regroupant les termes, on obtient finalement [GJC95, GCJ97]

$$Q(\Phi|\hat{\Phi}^r) = \sum_{i=1}^M \left[ \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)} \right] \log(\pi_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)] \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)} \quad (4.126)$$

ou plus simplement en posant

$$\boxed{w_{j,i}^{r+1} \triangleq \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)}} \quad (4.127)$$

$$\boxed{Q(\Phi|\hat{\Phi}^r) = \sum_{i=1}^M \left[ \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1} \right] \log(\pi_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)] w_{j,i}^{r+1}} \quad (4.128)$$

On va chercher à maximiser cette fonction par rapport aux paramètres  $\pi_i$  et  $\phi_i$  pour  $i = 1, \dots, M$  dans l'étape M de l'algorithme. On remarque déjà que

1.  $Q(\Phi|\hat{\Phi}^r)$  est la somme de 2 termes. Le premier terme  $\sum_{i=1}^M \left[ \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1} \right] \log(\pi_i)$  est une fonction linéaire des paramètres  $\log[\pi_i]$  que l'on peut **explicitelement maximiser**. Le deuxième terme  $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)]w_{j,i}^{r+1}$  est uniquement fonction des  $\phi_i$ .
2. Si on suppose les paramètres  $\phi_i$  **indépendants entre eux**, alors la maximisation du second terme reviendra à  $M$  maximisations individuelles

• **Etape M : Maximization**

1. **Maximisation du premier terme de  $Q(\Phi|\hat{\Phi}^r)$**  en les paramètres  $\pi_i$  sous la contrainte  $\sum_{i=1}^M \pi_i = 1$

Pour cela, on écrit le lagrangien de la fonction à maximiser

$$\boxed{\mathcal{L}(\pi, \lambda) = \sum_{i=1}^M \left[ \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)} \right] \log(\pi_i) + \lambda(1 - \sum_{i=1}^M \pi_i)} \quad (4.129)$$

La maximisation est obtenue en annulant le gradient du lagrangien,

$$\nabla_\pi \mathcal{L}(\pi, \lambda) = 0 \quad (4.130)$$

On aboutit à l'expression suivante pour les valeurs  $\pi_i$

$$\hat{\pi}_i^{r+1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1} \quad (4.131)$$

En utilisant le fait que  $p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r) = \sum_{i=1}^M \hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)$  et la contrainte  $\sum_{i=1}^M \pi_i = 1$ , on montre que le multiplicateur de Lagrange vaut  $\lambda = m_k$ . Par conséquent, on obtient finalement la mise à jour des paramètres estimés par

$$\boxed{\hat{\pi}_i^{r+1} = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}} \quad (4.132)$$

2. **Maximisation du deuxième terme de  $Q(\Phi|\hat{\Phi}^r)$**  en les paramètres  $(\phi_1, \dots, \phi_M)$ .

On cherche maintenant à maximiser

$$g(\Phi) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)] \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)] w_{j,i}^{r+1} \quad (4.133)$$

Puisque l'on suppose les paramètres  $\phi_i$  indépendants entre eux, les composantes  $\phi_i$  (pour  $i = 1, \dots, M$ ) du vecteur  $\Phi$  seront estimées (mises à jour) en prenant

$$\boxed{\hat{\phi}_i^{r+1} \in \arg \max_{\phi_i} \left\{ \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j|\phi_i)] \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\phi}_i^r)}{p_i(\mathbf{z}_j|\hat{\Phi}^r)} \right\}} \quad (4.134)$$

Cette maximisation n'est en général pas triviale à faire et l'on doit souvent utiliser des algorithmes spécifiques d'optimisation [DS83]. La maximisation est cependant donnée explicitement dans le cas des densités de la famille exponentielle et donc lorsque les densités sont gaussiennes [RW84] (voir cas particulier plus loin).

Chaque poids  $w_{j,i}^{r+1} \triangleq \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\phi}_i^r)}{p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\Phi}^r)}$  correspond à la **probabilité a posteriori** pour que la mesure  $\mathbf{z}_j$  provienne de la  $i$ ème hypothèse sachant l'estimation courante  $\hat{\Phi}^r$  à l'itération  $r$ .

### Résumé de l'algorithme EM

L'algorithme EM appliqué à l'estimation des paramètres d'une loi de mélange consiste à itérer les étapes suivantes jusqu'à la stabilité des valeurs obtenues.

#### 1. Mise à jour des paramètres $\pi_i$ par

$$\hat{\pi}_i^{r+1} = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1} \quad (4.135)$$

avec

$$w_{j,i}^{r+1} \triangleq \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j | \hat{\Phi}^r)} \quad (4.136)$$

#### 2. Mise à jour des paramètres $\phi_i$ par

$$\hat{\phi}_i^{r+1} \in \arg \max_{\phi_i} \left\{ \sum_{j=1}^{m_k} \log[p_i(\mathbf{z}_j | \phi_i)] w_{j,i}^{r+1} \right\} \quad (4.137)$$

### 4.5.6 Cas particulier du mélange de gaussiennes

Dans le cas où les densités  $p_i(\mathbf{z} | \phi_i)$  sont des gaussiennes de moyenne  $\bar{\mathbf{z}}_i$  et de covariance  $\mathbf{R}_i$  inconnues, on a

$$p_i(\mathbf{z} | \phi_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n_z/2} \sqrt{|\mathbf{R}_i|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_i)' \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_i)} \quad (4.138)$$

La mise à jour des paramètre  $\pi_i$  est obtenue comme précédemment. La maximisation de  $g(\Phi)$  quant à elle, peut être obtenue **explicitement** et la mise à jour des paramètres  $\phi_i = (\bar{\mathbf{z}}_i, \mathbf{R}_i)$  à l'itération  $r + 1$  sera donnée par

- Pour l'estimation des moyennes  $\bar{\mathbf{z}}_i$

$$\hat{\mathbf{z}}_i^{r+1} = \frac{\sum_{j=1}^{m_k} \mathbf{z}_j \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j | \hat{\Phi}^r)}}{\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j | \hat{\Phi}^r)}} = \frac{\sum_{j=1}^{m_k} \mathbf{z}_j w_{j,i}^{r+1}}{\sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}} \quad (4.139)$$

- Pour la mise à jour des covariances  $\mathbf{R}_i$

$$\hat{\mathbf{R}}_i^{r+1} = \frac{\sum_{j=1}^{m_k} (\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_i^{r+1})(\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_i^{r+1})' \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j | \tilde{\Phi}^r)}}{\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\hat{\pi}_i^r p_i(\mathbf{z}_j | \hat{\phi}_i^r)}{p(\mathbf{z}_j | \tilde{\Phi}^r)}} = \frac{\sum_{j=1}^{m_k} (\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_i^{r+1})(\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_i^{r+1})' w_{j,i}^{r+1}}{\sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}} \quad (4.140)$$

#### 4.5.7 Application de l'algorithme EM à l'EMP

Le problème d'estimation des paramètres de mélange que l'on vient de présenter peut être vu comme un problème d'estimation à un instant  $k$  donné. Le **problème de l'extraction multi-pistes (EMP)** est en fait une généralisation du problème précédent qui prend en compte l'aspect temporel. La généralisation de la méthode est quasi-immédiate.

##### Pseudo-modèle alloué aux fausses alarmes

Dans la présentation antérieure, nous n'avons volontairement pas fait de distinction particulière entre les modèles de sources. En fait, dans le problème de l'EMP, nous devons distinguer le cas particulier de la source allouée aux fausses alarmes. Si l'on veut tenir compte des fausses alarmes en plus des  $M$  cibles supposées présentes dans le batch de mesures, on devra donc rajouter un **pseudo-modèle** de source que l'on indexera par  $i = O$ . La vraisemblance, notée  $p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_0(k))$ , d'une mesure  $\mathbf{z}_j(k)$  allouée à ce pseudo-modèle de source correspondra à la densité (supposée **uniforme**) d'une fausse alarme car aucun paramètre cinématique ne caractérise une fausse alarme ( $\mathbf{x}_0 = \emptyset$ ). Ceci justifie la notation  $\sum_{i=0}^M$  utilisée dorénavant dans les formules.

##### Expressions des densités utiles

On a un batch de mesures, noté  $\mathbf{Z}^K$ , obtenu à partir de  $K$  scans successifs du senseur. Le vecteur cumulé des associations conjointes  $\Theta^K$  est inconnu.  $\mathbf{Z}^K$  constitue les données incomplètes du problème et  $(\mathbf{Z}^K, \Theta^K)$  les données complètes.  $\Theta^K$  sont les **données manquantes**. En généralisant la présentation précédente au cas temporel, on peut exprimer les différentes probabilités intervenant dans l'algorithme EM. Ainsi,

- la probabilité des données (cumulées) manquantes s'écrit

$$P\{\Theta^K | \Phi^K\} = \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} \pi_{\theta_j}(k) \quad (4.141)$$

où  $\Phi^K$  est le vecteur des paramètres (cumulés) à estimer défini en (4.96) et qui vaut

$$\Phi^K \triangleq (\mathbf{X}^K, \Pi^K) = (\Phi(1), \dots, \Phi(K)) \quad (4.142)$$

avec

$$\Phi(k) = ((\mathbf{x}_0(k) \equiv \emptyset, \pi_0(k)), (\mathbf{x}_1(k), \pi_1(k)), \dots, (\mathbf{x}_M(k), \pi_M(k))) \quad (4.143)$$

- la vraisemblance du paramètre basée sur les données complètes s'écrit (en supposant l'indépendance des variables)

$$P\{\mathbf{Z}^K, \Theta^K | \Phi^K\} = \prod_{k=1}^K p[\mathbf{Z}(k), \Theta(k) | \Phi(k)] = \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} p[\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_{\theta_j}(k)] \pi_{\theta_j}(k) \quad (4.144)$$

- la vraisemblance du paramètre basée sur les données incomplètes s'écrit d'après (4.108)

$$p(\mathbf{Z}^K | \Phi^K) = \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} \sum_{i=0}^M p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k)) \pi_i(k) \quad (4.145)$$

- la probabilité a posteriori du vecteur d'associations s'écrit

$$P\{\Theta^K | \mathbf{Z}^K, \Phi^K\} = \frac{p[\Theta^K, \mathbf{Z}^K | \Phi^K]}{p(\mathbf{Z}^K | \Phi^K)} = \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} P\{\theta_j(k) | \mathbf{z}_j(k), \Phi(k)\} \pi_i(k) \quad (4.146)$$

avec

$$P\{\theta_j(k) | \mathbf{z}_j(k), \Phi(k)\} = \frac{p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_{\theta_j}(k)) \pi_{\theta_j}(k)}{\sum_{i=0}^M p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k)) \pi_i(k)} \quad (4.147)$$

On rappelle que les probabilités  $\pi_i(k)$  sont soumises à chaque instant  $k$  à la contrainte

$$\sum_{i=0}^M \pi_i(k) = 1 \quad (4.148)$$

Nous sommes maintenant en mesure de décrire les étapes de l'algorithme EM qui découle de la généralisation du cas précédent.

- Etape E : Expectation

Supposons disposer de  $\hat{\Phi}^{K,r}$  à l'itération antérieure  $r$ , l'expression de  $Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r})$  pour l'itération courante  $r+1$  est obtenue en généralisant la relation (4.124) ; soit

$$Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) = E[\log[p[\mathbf{Z}^K, \Theta^K | \Phi^K]] | \mathbf{Z}^K, \hat{\Phi}^{K,r}] = \sum_{\Theta^K} \log[p[\mathbf{Z}^K, \Theta^K | \Phi^K]] P\{\Theta^K | \mathbf{Z}^K, \hat{\Phi}^{K,r}\} \quad (4.149)$$

En tenant compte des expressions de  $p[\mathbf{Z}^K, \Theta^K | \Phi^K]$  et  $P\{\Theta^K | \mathbf{Z}^K, \Phi^K\}$ , il vient

$$Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) = \sum_{\Theta^K} \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \log[p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_{\theta_j}(k))] \hat{\pi}_{\theta_j}^r(k) \right\} \left\{ \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^{m_k} P\{\theta_j(k) | \mathbf{z}_j(k), \hat{\Phi}^{K,r}\} \right\} \quad (4.150)$$

Après décomposition et simplification des sommes [Gau97], il vient

$$Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{\theta_j(k)=0}^M \log[\pi_{\theta_j}(k)] w_{j,\theta_j}^{r+1}(k) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{\theta_j(k)=0}^M \log[p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_{\theta_j}(k))] w_{j,\theta_j}^{r+1}(k) \quad (4.151)$$

avec

$$w_{j,\theta_j}^{r+1}(k) \triangleq \frac{\pi_i^r(k)p(\mathbf{z}_j(k)|\hat{\mathbf{x}}_i^r(k))}{p(\mathbf{z}_j(k)|\hat{\Phi}^r(k))} \quad (4.152)$$

Puisque  $\forall k = 1, \dots, K$  et  $\forall j = 1, \dots, m_k$ ,  $\theta_j(k)$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1, \dots, M\}$ , on peut intervertir les sommes pour obtenir finalement

$$Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \left[ \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k) \right] \log[\pi_i(k)] + \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \log[p(\mathbf{z}_j(k)|\mathbf{x}_i(k))] w_{j,i}^{r+1}(k) \quad (4.153)$$

On va **chercher à maximiser cette fonction** par rapport aux paramètres  $\pi_i(k)$  et  $\mathbf{x}_i(k)$  pour  $i = 0, 1, \dots, M$  dans l'étape M de l'algorithme. Comme dans la remarque précédente, on voit que

1.  $Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r})$  est la somme de 2 termes. Le premier terme est une fonction linéaire des paramètres  $\log[\pi_i]$  que l'on peut **explicitement maximiser**. Le deuxième terme est uniquement fonction des  $\mathbf{x}_i(k)$ .
2. Si on suppose les états des cibles  $\mathbf{x}_i$  indépendants entre eux, alors la maximisation du second terme reviendra à  $M$  maximisations individuelles (le pseudo-état  $\mathbf{x}_0$  de la source des fausses alertes étant toujours égal  $\emptyset$ ).

#### • Etape M : Maximization

La maximisation de  $Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r})$  se décompose en 2 maximisation : l'une suivant les paramètres de mélange  $\pi_i(k)$ , et l'autre suivant les paramètres cinématique des sources. En fait cette seconde maximisation se traduit par l'estimation des paramètres cinématiques à l'instant initial  $k = 0$  que l'on note  $\mathbf{X}(0) = (\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_M(0))$ .

1. **La maximisation du premier terme de  $Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r})$**  en les paramètres de mélange  $\pi_i(k)$  sous la contrainte  $\sum_{i=0}^M \pi_i(k) = 1 \quad \forall k$  nous conduit à la relation de mise à jour suivante

$$\hat{\pi}_i^{r+1}(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k) \quad (4.154)$$

2. **La maximisation du deuxième terme de  $Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r})$**  en les paramètres cinématiques à l'instant initial  $\mathbf{x}(0)$  ; On cherche à estimer les composantes  $\mathbf{x}_i(0)$  (pour  $i = 1, \dots, M$ ) du vecteur  $\mathbf{X}(0)$ . Ces quantités seront obtenues à l'itération  $r + 1$  par

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(0) \in \arg \max_{\mathbf{x}_i(0)} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \log[p(\mathbf{z}_j| \mathbf{x}_i(0))] w_{j,i}^{r+1}(k) \quad (4.155)$$

#### 4.5.8 Application de l'algorithme EM pour le MAP : Algorithme PMHT

Jusqu'à présent, on a utilisé l'algorithme EM pour l'EMP en cherchant à maximiser la fonction de vraisemblance du paramètre. Les auteurs du PMHT, Streit et Luginbuhl utilisent l'algorithme EM pour maximiser le critère du maximum a posteriori (MAP) en introduisant une information supplémentaire sur la distribution a priori  $P\{\Phi^K\} = p[\mathbf{X}^K, \Pi^K]$  des paramètres à estimer. Le calcul du MAP par l'algorithme EM donne exactement la formulation du PMHT proposée par Streit et Luginbuhl qui aboutissent à un filtrage de Kalman dans le cas d'une équation d'observation linéaire.

Il est montré en [DLR77] que l'estimée au sens du MAP du vecteur des paramètres peut être obtenue par l'algorithme EM en prenant non plus la fonction  $Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r})$ , mais la fonction suivante

$$M(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) = Q(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) + \log[P\{\Phi^K\}] \quad (4.156)$$

L'expression de  $\log[P\{\Phi^K\}]$  s'écrit en supposant que les vecteurs d'états suivent un processus markovien (équation de dynamique) d'ordre 1

$$\begin{aligned} \log[P\{\Phi^K\}] &= \log[p[\mathbf{X}^K, \Pi^K]] \\ &= \log\left[p(\mathbf{X}(0)) \prod_{k=1}^K p(\mathbf{X}(k) | \mathbf{X}(k-1))\right] \\ &= \log\left[\prod_{i=1}^M p(\mathbf{x}_i(0)) \prod_{i=1}^M \prod_{k=1}^K p(\mathbf{x}_i(k) | \mathbf{x}_i(k-1))\right] \\ &= \sum_{i=1}^M \log[p(\mathbf{x}_i(0))] + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K p(\mathbf{x}_i(k) | \mathbf{x}_i(k-1)) \end{aligned}$$

On a volontairement omis les paramètres  $\Pi$  du mélange car on a aucune information a priori sur ces quantités. Par ailleurs le pseudo-modèle  $i = 0$  est aussi omis car il ne représente pas de paramètre cinématique.

Compte tenu de cette expression, on a maintenant la fonction suivante à maximiser

$$\begin{aligned} M(\Phi^K | \hat{\Phi}^{K,r}) &= \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \left[ \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k) \right] \log[\pi_i(k)] + \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \log[p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))] w_{j,i}^{r+1}(k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \log[p(\mathbf{x}_i(0))] + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K p(\mathbf{x}_i(k) | \mathbf{x}_i(k-1)) \end{aligned}$$

Cette maximisation est toujours séparable en deux maximisations indépendantes. Les paramètres du mélange sont toujours estimés à l'itération  $r + 1$  par la relation

$$\hat{\pi}_i^{r+1}(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k) \quad (4.157)$$

Les paramètres cinématiques estimés pour  $i = 1, \dots, M$  sont maintenant mis à jour à l'itération  $r + 1$  en prenant

$$\boxed{(\hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(0), \dots, \hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(K)) \in \arg \max_{\mathbf{X}_i} \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \log[p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))] w_{j,i}^{r+1}(k) + \log[p(\mathbf{x}_i(0))] + \sum_{k=1}^K p(\mathbf{x}_i(k) | \mathbf{x}_i(k-1)) \right\}} \quad (4.158)$$

#### 4.5.9 Cas particulier des processus linéaires markoviens gaussiens

Dans ce cas particulier intéressant, au lieu de maximiser l'expression précédente, on va chercher plutôt à maximiser l'exponentielle de celle-ci ; c'est à dire

$$\boxed{(\hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(0), \dots, \hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(K)) \in \arg \max_{\mathbf{X}_i} \left\{ p(\mathbf{x}_i(0)) \prod_{k=1}^K \left[ p(\mathbf{x}_i(k) | \mathbf{x}_i(k-1)) \prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))^{w_{j,i}^{r+1}(k)} \right] \right\}} \quad (4.159)$$

Puisque les densités  $p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))$  sont des gaussiennes de la forme

$$p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_j(k); \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i(k), \mathbf{R}_i(k)) \quad (4.160)$$

Le produit  $\prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))^{w_{j,i}^{r+1}(k)}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))^{w_{j,i}^{r+1}(k)} &= \prod_{j=1}^{m_k} \mathcal{N}(\mathbf{z}_j(k); \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i(k), \mathbf{R}_i(k))^{w_{j,i}^{r+1}(k)} \\ &= \prod_{j=1}^{m_k} \mathcal{N}(\mathbf{z}_j(k); \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i(k), (w_{j,i}^{r+1}(k))^{-1} \mathbf{R}_i(k)) \\ &\equiv \mathcal{N}(\check{\mathbf{z}}_i^{r+1}(k); \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i(k), \check{\mathbf{R}}_i(k)) \end{aligned}$$

avec par définition

$$\boxed{\check{\mathbf{z}}_i^{r+1}(k) \triangleq \frac{1}{m_k \hat{\pi}_i^{r+1}(k)} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k) \mathbf{z}_j(k)} \quad (4.161)$$

et

$$\boxed{\check{\mathbf{R}}_i(k) \triangleq \frac{\mathbf{R}_i(k)}{m_k \hat{\pi}_i^{r+1}(k)}} \quad (4.162)$$

Cette **maximisation** se ramène donc à un **filtrage de Kalman** où la mesure est remplacée par le centroïde  $\check{\mathbf{z}}_i^{r+1}(k)$  des mesures à l'étape courante  $r+1$  de matrice de covariance  $\check{\mathbf{R}}_i(k)$ .  $\check{\mathbf{z}}_i^{r+1}(k)$  est appelée **mesure synthétique** du modèle  $i$  à l'itération  $r + 1$ .  $\check{\mathbf{R}}_i(k)$  est la covariance synthétique associée.

#### 4.5.10 Résumé du principe général de la méthode EM pour l'EMP

- on choisit une longueur  $K$  du batch

- on suppose connu le nombre  $M$  de sources présentes
- la probabilité détection (inconnue) des sources peut être  $< 1$
- mettre le compteur d'itération à  $r = 0$
- on doit initialiser le vecteur de paramètres  $\hat{\Phi}^{K,0} = (\hat{\mathbf{X}}^{K,0}, \hat{\Pi}^{K,0})$
- on affine l'estimation de  $\Phi$  à l'itération courante  $r+1$  à partir de l'estimation à l'itération précédente  $\hat{\Phi}^{K,r}$  à partir des 2 étapes suivantes :

1. **Mise à jour de  $\hat{\Pi}^K$**  :  $\forall k = 1, \dots, K$  et  $\forall i = 0, \dots, M$

$$\hat{\pi}_i^{r+1}(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k)$$

avec

$$w_{j,\theta_j}^{r+1}(k) \triangleq \frac{\pi_i^r(k) p(\mathbf{z}_j(k) | \hat{\mathbf{x}}_i^r(k))}{p(\mathbf{z}_j(k) | \hat{\Phi}^r(k))}$$

2. **Mise à jour de  $\hat{\mathbf{X}}^K$**  :  $\forall i = 1, \dots, M$

- **Pour le ML (maximum de vraisemblance)**

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(0) \in \arg \max_{\mathbf{x}_i(0)} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} \log[p(\mathbf{z}_j | \mathbf{x}_i(0))] w_{j,i}^{r+1}(k)$$

- **Pour le MAP (maximum a posteriori)**

$$(\hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(0), \dots, \hat{\mathbf{x}}_i^{r+1}(K)) \in \arg \max_{\mathbf{x}_i} \left\{ p(\mathbf{x}_i(0)) \prod_{k=1}^K \left[ p(\mathbf{x}_i(k) | \mathbf{x}_i(k-1)) \prod_{j=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_j(k) | \mathbf{x}_i(k))^{w_{j,i}^{r+1}(k)} \right] \right\}$$

Les maximisations pour mettre à jour  $\hat{\mathbf{X}}^K$  nécessitent des algorithmes d'optimisation spécifiques de type newtonien (pour le ML) ou filtrage de Kalman (pour le MAP).

#### 4.5.11 Résumé du PMHT

Le PMHT est en fait l'application de la méthode précédente dans le cas particulier où les sources suivent un **processus gaussiens markovien avec des équations de dynamique et d'observation linéaires**. L'algorithme est le suivant :

- on choisit une longueur  $K$  du batch
- on suppose connu le nombre  $M$  de sources présentes
- la détection des sources peut être  $< 1$
- mettre le compteur d'itération à  $r = 0$
- on doit initialiser le vecteur de paramètres  $\hat{\Phi}^{K,0} = (\hat{\mathbf{X}}^{K,0}, \hat{\Pi}^{K,0})$
- on affine l'estimation de  $\Phi$  à l'itération courante  $r+1$  à partir de l'estimation à l'itération précédente  $\hat{\Phi}^{K,r}$  à partir des étapes suivantes :

1. **Mise à jour de  $\hat{\Pi}^K$**  :  $\forall k = 1, \dots, K$  et  $\forall i = 0, \dots, M$

(a) Calculer les probabilités d'associations a posteriori

$$w_{j,\theta_j}^{r+1}(k) \triangleq \frac{\pi_i^r(k)p(\mathbf{z}_j(k)|\hat{\mathbf{x}}_i^r(k))}{p(\mathbf{z}_j(k)|\hat{\Phi}^r(k))}$$

(b) Mettre à jour les probabilités estimées  $\hat{\pi}_i^r$  par

$$\hat{\pi}_i^{r+1}(k) = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k)$$

2. Calculer les mesures synthétiques des sources  $i = 1, \dots, M$  et leur covariance par

$$\check{\mathbf{z}}_i^{r+1}(k) \triangleq \frac{1}{m_k \hat{\pi}_i^{r+1}(k)} \sum_{j=1}^{m_k} w_{j,i}^{r+1}(k) \mathbf{z}_j(k)$$

$$\check{\mathbf{R}}_i(k) \triangleq \frac{\mathbf{R}_i(k)}{m_k \hat{\pi}_i^{r+1}(k)}$$

3. Pour chaque source  $i = 1, \dots, M$ , utiliser un filtrage de Kalman avec lissage pour obtenir les nouveaux états estimés  $\hat{\mathbf{X}}^{K,r+1} = (\hat{\mathbf{X}}_1^{K,r+1}, \dots, \hat{\mathbf{X}}_M^{K,r+1})$  en utilisant les mesures synthétiques  $\check{\mathbf{z}}_i^{r+1}(k)$  et le covariances  $\check{\mathbf{R}}_i(k)$ .

4. incrémenter  $r$  et retourner à l'étape no 1 jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

L'expérience montre que généralement 3 à 5 itérations suffisent à obtenir une estimation précise des paramètres. La stabilité est atteinte en moyenne entre 10 et 20 itérations selon le problème.

Des exemples d'application du PMHT à la poursuite angulaire dans le contexte du sonar peuvent être trouvés en [GJC95, Gau97, GCJ97] et des résultats plus récents en [Wor98]. Une extension du PMHT au cas multi-senseurs est également proposée en [Gau97].

#### 4.5.12 Mise en garde

Des modifications complémentaires sont nécessaires à l'implémentation du PMHT pour lui conférer des performances acceptables (c.à.d comparables à celles que l'on obtiendrait avec le PDAF et le JPDAF pour un même scénario). Nous n'entrerons pas dans ces détails techniques dans ce cours. Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur à [RWS94, Gau97] et [WRS98] pour une discussion des variantes du PMHT.

Outre les problèmes de mise en œuvre numérique, **un des problèmes essentiels du PMHT reste son initialisation**. Actuellement, on ne sait pas initialiser le PMHT de manière robuste afin qu'il génère la solution globale au problème. Selon l'initialisation choisie, le PMHT peut générer des solutions locales qui peuvent être éloignées de la vraie solution cherchée...

En conclusion, le PMHT bien que théoriquement séduisant n'est pas encore arrivé à une maturité opérationnelle et reste une méthode délicate à mettre en œuvre. Des recherches sont en cours pour améliorer l'efficacité de l'algorithme [Wor98].



## Chapitre 5

# Pistage multi-cibles mono-senseur par approches non bayésiennes

A l'opposé des méthodes bayésiennes présentées au chapitre précédent, on présente ici les principales approches non bayésiennes permettant d'effectuer le pistage multi-cibles. Dans ces méthodes, on cherche à trouver l'assignation optimale du problème par des méthodes d'**optimisation combinatoire**. On n'effectue pas de pondération probabiliste des états par les probabilités des hypothèses d'associations possibles. On cherche directement l'affectation (la partition) optimale des mesures aux pistes et c'est cette partition qui servira à la mise à jour des pistes. La recherche de la partition optimale peut être élaborée en utilisant soit

- l'ensemble cumulé des mesures disponibles  $\mathbf{Z}^k$
- l'ensemble cumulé des mesures disponibles durant un certain nombre de scans (fenêtre glissante)
- uniquement les mesures du scan courant  $\mathbf{z}(k)$

Le problème général consiste donc à associer les mesures délivrées lors d'une suite de  $k$  scans afin de former des séquences de mesures relatives aux différentes cibles à pister. C'est un problème d'assignation k-D (k-dimensional) qui est NP-difficile dès que  $k > 2$ . Autrement dit, la complexité numérique du problème n'est pas une fonction polynomiale de la dimension  $k$  mais une fonction à croissance exponentielle.

### 5.1 Pistage multi-cibles par programmation entière 0-1 (1977)

#### 5.1.1 Formulation du problème

On suppose qu'il existe un certain nombre  $T$  de cibles dans l'espace d'observation du senseur **ayant chacune une probabilité de détection unitaire** ( $P_d^t = 1 \forall t$ ). Le nombre  $T$  **n'est pas nécessairement connu**. Cette présentation suit la démarche de C. Morefield en [Mor77]. Chaque cible  $t$  est supposée suivre

un processus gaussien/markovien classique du type

$$\mathbf{x}^t(k+1) = \mathbf{F}^t(k)\mathbf{x}^t(k) + \mathbf{v}^t(k)$$

$$\mathbf{z}^t(k) = \mathbf{H}^t(k)\mathbf{x}^t(k) + \mathbf{w}^t(k)$$

où les quantités  $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{F}$  et  $\mathbf{H}$  ont leur sens habituel. L'état initial des cibles est supposé gaussien avec

$$\mathbf{x}^t(0) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}^t(0| -1), \mathbf{P}^t(0| -1)) \quad (5.1)$$

Les  $m_k$  mesures courantes au temps  $k$  et les mesures antérieures cumulées jusqu'à l'instant  $k$  sont notées  $\mathbf{Z}(k)$  et  $\mathbf{Z}^k$ . Le nombre total cumulé de mesures disponibles à l'instant  $k$  vaut

$$M = \sum_{k'=1}^k m_{k'} \quad (5.2)$$

Comme pour le FBO, TSF et MHT, une séquence **particulière** de mesures cumulées est notée  $\mathbf{Z}^{k,l}$

$$\boxed{\mathbf{Z}^{k,l} \triangleq \{\mathbf{z}_{i_l}(1), \dots, \mathbf{z}_{i_l}(k)\} = \{\mathbf{Z}^{k-1,s}, \mathbf{z}_{i_l}(k)\} \in \mathbf{Z}^k} \quad (5.3)$$

Soit  $N$  le nombre de séquences possibles et pour  $l = 1, \dots, N$  on note  $\theta^l(k)$  l'évènement suivant :

$$\theta^l(k) \triangleq \{\mathbf{Z}^{k,l} \text{ correspond à piste correcte}\} \quad (5.4)$$

Afin de réduire la dimension du problème, on considère uniquement les séquences  $\mathbf{Z}^{k,l}$  dont la log-vraisemblance négative  $\lambda^l(k)$  de  $\theta^l(k)$  définie par

$$\boxed{\lambda^l(k) = -\log p[\mathbf{Z}^{k,l} | \theta^l(k)]} \quad (5.5)$$

est en dessous d'un certain seuil fixé a priori (voir la section sur le TSF). Après ce seuillage, on dispose de  $L \leq N$  séquences  $\mathbf{Z}^{k,l}$  potentiellement **acceptables**. L'ensemble des séquences de mesures acceptables est noté

$$\boxed{\mathcal{S} \triangleq \{\mathbf{Z}^{k,l}\}_{l=1}^L} \quad (5.6)$$

Le problème général à résoudre est le suivant :

**Parmi l'ensemble des séquences acceptables possibles, trouver la partition faisable de  $\mathbf{Z}^k$  la plus vraisemblable.**

### 5.1.2 Notion de partition faisable des mesures

Une partition possible  $\mathcal{P}$  des mesures de  $\mathbf{Z}^k$  est un ensemble fini de séquences  $\mathbf{Z}^{k,l}$  acceptables appartenant à  $\mathcal{S}$  vérifiant les contraintes suivantes :

- l'ensemble de toutes les mesures des séquences de la partition vaut  $\mathbf{Z}^k$ , i.e.

$$\mathbf{Z}^k = \bigcap_{i=0}^I \mathbf{Z}^{k,l_i} \quad (5.7)$$

- Chaque mesure appartient à une séquence et une seule

$$\mathbf{Z}^{k,l_i} \cap \mathbf{Z}^{k,l_j} = \emptyset \quad \forall l_i \neq l_j \quad (5.8)$$

Une partition faisable est donc de la forme

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\mathbf{Z}^{k,l_i}\}_{i=0}^I} \quad (5.9)$$

Par convention, l'ensemble  $\mathbf{Z}^{k,0} \equiv \mathbf{Z}_{\mathcal{P}}^{k,0}$  contiendra toutes les mesures associées à aucune piste **dans la partition  $\mathcal{P}$  considérée**. Ces mesures seront considérées comme des fausses alarmes uniformément réparties dans le volume  $V$  de surveillance du senseur.

### 5.1.3 Critère pour la recherche de la meilleure partition

Soit  $\mathcal{P}$  une partition faisable des mesures au sens indiqué précédemment. A toute partition  $\mathcal{P}$  on peut faire correspondre l'évènement suivant :

$$\boxed{\theta(\mathcal{P}) \triangleq \{\text{la partition } \mathcal{P} \text{ est correcte}\}} \quad (5.10)$$

On note  $\mathfrak{P}$  l'ensemble de toutes les partitions  $\mathcal{P}$  faisables possibles. La partition optimale  $\mathcal{P}^*$  (au sens du maximum de vraisemblance) est celle qui maximise la fonction de vraisemblance  $p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P}))$ , c'est à dire

$$\boxed{\mathcal{P}^* = \arg \max_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P}))} \quad (5.11)$$

Comme nous le verrons, ce problème de maximisation est strictement équivalent à un problème en programmation entière 0-1 de minimisation sous contrainte.

### 5.1.4 Expression de la vraisemblance d'une séquence

On rappelle ici (cf la section sur le TSF) que la log-vraisemblance négative d'une séquence vaut

$$\boxed{\lambda^l(k) = -\log p(\mathbf{Z}^{k,l} | \theta^l(k))} \quad (5.12)$$

On note  $\theta^0(k)$  l'évènement particulier suivant

$$\theta^0(k) \triangleq \{\text{toutes les mesures sont des fausses alarmes}\} \quad (5.13)$$

En supposant les fausses alarmes uniformément réparties dans le volume  $V$  à chaque instant et indépendantes d'un scan à l'autre, on a

$$p(\mathbf{Z}^{k,l} | \theta^0(k)) = \left[ \frac{1}{V} \right]^{N_l} \quad (5.14)$$

où  $N_l = \text{Card}(\mathbf{Z}^{k,l})$  est le nombre d'éléments de  $\mathbf{Z}^{k,l}$ . Le rapport de vraisemblance d'une séquence va donc s'écrire

$$\Lambda^l(k) = \frac{p(\mathbf{Z}^{k,l}|\theta^l(k))}{p(\mathbf{Z}^{k,l}|\theta^0(k))} \quad (5.15)$$

et l'opposé de son logarithme va s'écrire

$$\tilde{\lambda}^l(k) = -\log[\Lambda^l(k)] = -\log\left[\frac{p(\mathbf{Z}^{k,l}|\theta^l(k))}{p(\mathbf{Z}^{k,l}|\theta^0(k))}\right] = -\log[p(\mathbf{Z}^{k,l}|\theta^l(k))] + \log[p(\mathbf{Z}^{k,l}|\theta^0(k))] \quad (5.16)$$

soit finalement

$$\boxed{\tilde{\lambda}^l(k) = \lambda^l(k) + N_l \log[V^{-1}]} \quad (5.17)$$

Pour chaque séquence acceptable  $\mathbf{Z}^{k,l}$ , on devra calculer  $\tilde{\lambda}^l(k)$  et construire le vecteur  $\tilde{\lambda}$  des rapports de vraisemblance défini par

$$\tilde{\lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1(k) \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^L(k) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Ceci exige donc une **énumération exhaustive de toutes les séquences possibles**. La méthode devient vite coûteuse en calculs et mémoire lorsque les dimensions du problème augmentent.

### 5.1.5 Equivalence du problème avec la programmation entière 0-1

#### Indicateur d'appartenance d'une séquence à une partition

Pour chaque partition faisable  $\mathcal{P}$ , on peut construire un vecteur binaire  $\rho(\mathcal{P})$  de dimension  $L \times 1$  qui décrit l'appartenance ou non de toutes les séquences de mesures acceptables à la partition  $\mathcal{P}$  considérée. Autrement dit, pour chaque  $\mathcal{P} = \{\mathbf{Z}^{k,l_i}\}_{i=0}^I$  on construit

$$\rho(\mathcal{P}) \triangleq \begin{bmatrix} \rho^1(\mathcal{P}) \\ \vdots \\ \rho^L(\mathcal{P}) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

avec

$$\rho_{l_i}(\mathcal{P}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{Z}^{k,l_i} \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{si } \mathbf{Z}^{k,l_i} \notin \mathcal{P} \end{cases} \quad i = 0, \dots, I \quad (5.20)$$

#### Indicateur d'appartenance des mesures à une séquence

On construit pour chaque séquence acceptable  $\mathbf{Z}^{k,l}$ , un vecteur  $\psi^l$  de dimension  $N = \text{Card}(\mathbf{Z}^k)$  à composantes binaires décrivant l'appartenance ou non des mesures de  $\mathbf{Z}^k$  à la séquence  $\mathbf{Z}^{k,l}$  considérée. Autrement, dit

$$\psi^l \triangleq \begin{bmatrix} \psi_1^l \\ \vdots \\ \psi_N^l \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

avec

$$\psi_i^l = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{z}_i \in \mathbf{Z}^k \text{ et } \mathbf{z}_i \in \mathbf{Z}^{k,l} \\ 0 & \text{si } \mathbf{z}_i \in \mathbf{Z}^k \text{ et } \mathbf{z}_i \notin \mathbf{Z}^{k,l} \end{cases} \quad (5.22)$$

A partir de ces  $L$  indicateurs, on peut construire la matrice binaire suivante de dimension  $N \times L$

$$\boxed{\mathbf{A} \triangleq [\psi^1 \dots \psi^L]} \quad (5.23)$$

Les conditions de faisabilité d'une partition  $\mathcal{P}$  de  $\mathbf{Z}^k$  sont alors équivalentes à la contrainte suivante

$$\boxed{\mathbf{A}\rho(\mathcal{P}) \leq \mathbf{1}} \quad (5.24)$$

où  $\mathbf{1}$  est un vecteur de dimension  $N \times 1$  dont les composantes valent 1.

### 5.1.6 Résolution du problème par programmation entière 0-1

La recherche de la partition optimale s'obtient par la **maximisation** de  $p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P}))$  suivant  $\mathcal{P}$ . Ceci est équivalent au problème de la **minimisation** de  $-\log[p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P}))]$ ; autrement dit

$$\boxed{\max_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P})) \Leftrightarrow \min_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} -\log[p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P}))]} \quad (5.25)$$

En supposant les séquences (constituant chaque partition) indépendantes entre elles, on a la décomposition suivante

$$\begin{aligned} -\log[p(\mathbf{Z}^k | \theta(\mathcal{P}))] &= -\log p(\mathbf{Z}_{\mathcal{P}}^{k,0}, \mathbf{Z}_{\mathcal{P}}^{k,1}, \dots, \mathbf{Z}_{\mathcal{P}}^{k,l_I} | \theta(\mathcal{P})) \\ &= -\log \left[ \prod_{i=0}^I p(\mathbf{Z}^{k,i} | \theta(\mathcal{P})) \right] \\ &= -\log[p(\mathbf{Z}_{\mathcal{P}}^{k,0} | \theta(\mathcal{P}))] - \sum_{i=1}^I \log[p(\mathbf{Z}^{k,i} | \theta(\mathcal{P}))] \\ &= \lambda_{\mathcal{P}}^0(k) + \sum_{l=1}^L \rho_l \lambda^l(k) \\ &= -N_0 \log[V^{-1}] + \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) \lambda^l(k) \end{aligned}$$

avec

$$N_0 = N - \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) N_l \quad (5.26)$$

En remplaçant  $N_0$  par son expression, il vient

$$\begin{aligned}
-\log[p(\mathbf{Z}^k|\theta(\mathcal{P}))] &= -N_0 \log[V^{-1}] + \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) \lambda^l(k) \\
&= -N \log[V^{-1}] + \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) N_l \log[V^{-1}] + \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) \lambda^l(k) \\
&= -N \log[V^{-1}] + \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) [\lambda^l(k) + N_l \log[V^{-1}]] \\
&= -N \log[V^{-1}] + \sum_{l=1}^L \rho_l(\mathcal{P}) \tilde{\lambda}^l(k) \\
&= \rho(\mathcal{P})' \tilde{\lambda} - N \log[V^{-1}]
\end{aligned}$$

Puisque  $-N \log[V^{-1}]$  est une constante, la minimisation de  $-\log[p(\mathbf{Z}^k|\theta(\mathcal{P}))]$  est donc rigoureusement équivalente à la minimisation de  $\rho(\mathcal{P})' \tilde{\lambda}$  suivant  $\rho$  sous la contrainte  $\mathbf{A}\rho(\mathcal{P}) \leq \mathbf{1}$ .

En résumé, on vient de montrer que

$$\max_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} p(\mathbf{Z}^k|\theta(\mathcal{P})) \Leftrightarrow \min_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} -\log[p(\mathbf{Z}^k|\theta(\mathcal{P}))] \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{\rho} \rho' \tilde{\lambda} \\ \text{sous la contrainte } \mathbf{A}\rho \leq \mathbf{1} \end{cases} \quad (5.27)$$

Ce type de problème d'optimisation est fréquemment rencontré en recherche opérationnelle et de nombreux algorithmes permettent de le résoudre. Morefield, à l'époque, utilisa l'algorithme de Pierce et Lasky [Pie68, PL75]. Depuis d'autres algorithmes d'optimisation plus performants ont été développés [GMW81, PS82, Ber82, Ber91].

### Remarque

Dans le cas où il n'y a pas de fausses alarmes mais uniquement les  $T$  cibles détectées à chaque scan la contrainte (inégalité) de faisabilité des partitions devient alors une contrainte égalité, et le problème à résoudre s'exprime

$$\max_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} p(\mathbf{Z}^k|\theta(\mathcal{P})) \Leftrightarrow \min_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} -\log[p(\mathbf{Z}^k|\theta(\mathcal{P}))] \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{\rho} \rho' \tilde{\lambda} \\ \text{sous la contrainte } \mathbf{A}\rho = \mathbf{1} \end{cases} \quad (5.28)$$

### 5.1.7 En résumé

La méthode de pistage multi-cibles proposée par Morefield possède les caractéristiques suivantes :

- c'est une méthode de type **batch** - on doit mémoriser un certain nombre de scans
- c'est une méthode non bayésienne - on recherche la partition optimale au sens du maximum de vraisemblance
- le nombre des cibles présentes est inconnu
- la probabilité de détection des cibles est unitaire
- la complexité du problème est NP-hard
- elle permet l'initialisation de pistes [DPBS92b]
- elle peut être étendue au cas où la  $P_d < 1$  - cf section suivante
- elle peut être étendue au cas multi-senseurs puisque le problème d'assignation de mesures d'un senseur au cours du temps est analogue au problème d'associations entre mesures issues de plusieurs senseurs délivrées au même instant [PDBSW92, PDBSW90].
- le problème d'assignation 3-D - (multi-scans multi-mesures et multi-senseurs) par l'extension de ce type d'approche est aussi possible [DPBSY94]

### 5.1.8 Extension de la méthode au cas des détections manquantes

Pour tenir compte des détections manquantes dans une piste lorsque la probabilité de détection des cibles est non unitaire, on construit un vecteur binaire indicateur des mesures manquantes dans chaque séquence acceptable  $\mathbf{Z}^{k,l}$  associée à une piste possible notée  $\theta^l(k)$ . Autrement dit pour chaque séquence envisagée  $l$ , on construit

$$\delta^{k,l} \triangleq \begin{bmatrix} \delta^l(1) \\ \vdots \\ \delta^l(k) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

avec

$$\delta^l(j) = \begin{cases} 1 & \text{si la piste } \theta^l(k) \text{ a été détectée au temps } j \\ 0 & \text{si la piste n'a pas été détectée au temps } j \end{cases} \quad (5.30)$$

La fonction de vraisemblance d'une **piste incomplète** (ayant des détections manquantes)  $\theta^l(k)$  est la PDF (Probability Density Function) conjointe de la séquence  $\mathbf{Z}^{k,l}$  et des détections  $\delta^{k,l}$  sachant  $\theta^l(k)$ , c.à.d

$$P[\mathbf{Z}^{k,l}, \delta^{k,l} | \theta^l(k)] = p(\mathbf{Z}^l(k) | \theta^l(k)) \prod_{j=1}^k P_d^{\delta^l(j)} (1 - P_d)^{1 - \delta^l(j)} \quad (5.31)$$

Le rapport de vraisemblance  $\tilde{\lambda}^l(k)$  d'une piste incomplète  $\theta^l(k)$  va alors s'écrire

$$\tilde{\lambda}^l(k) = -\log \frac{P[\mathbf{Z}^{k,l}, \delta^{k,l} | \theta^l(k)]}{p(\mathbf{Z}^l(k) | \theta^0(k))} \quad (5.32)$$

Ce rapport n'a pas de dimension ; ce qui permet de pouvoir comparer des séquences de mesures de longueurs différentes et la résolution du problème de recherche de la partition optimale suit alors la méthode décrite précédemment. Des extensions pour prendre en compte l'apparition de cibles nouvelles et la durée des pistes ont été proposées en [Bla86].

# Chapitre 6

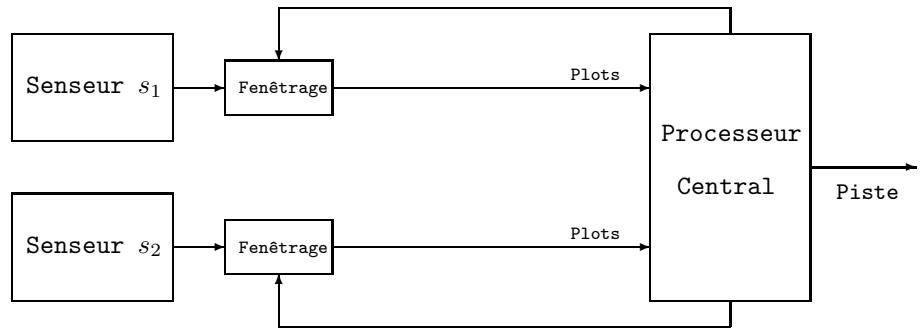
## Pistage multi-senseurs

Dans ce chapitre, nous abordons successivement les points suivants :

- **Le pistage multi-senseurs mono et multi-cibles**

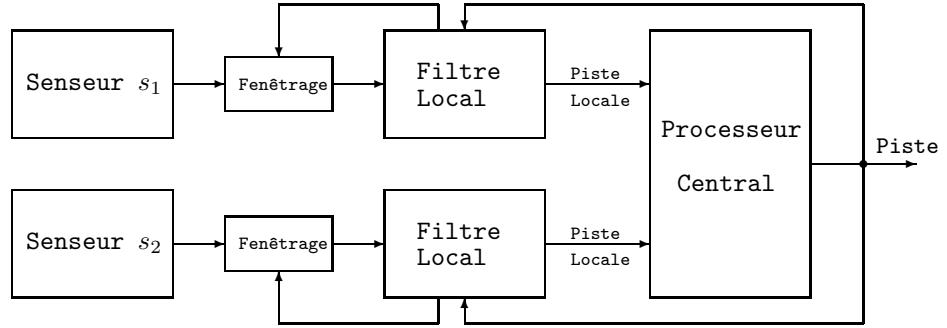
On traite ici le problème de l'association des mesures relevées par plusieurs senseurs pour estimer l'état de chaque cible présente dans l'environnement. Deux types d'architectures de fusion sont présentés.

1. **La fusion centralisée**



Cette architecture consiste à estimer l'état des cibles à partir de toutes les mesures fournies par les senseurs. Dans le cas général, il faut résoudre l'association plot à plot avant de pouvoir mettre à jour les pistes.

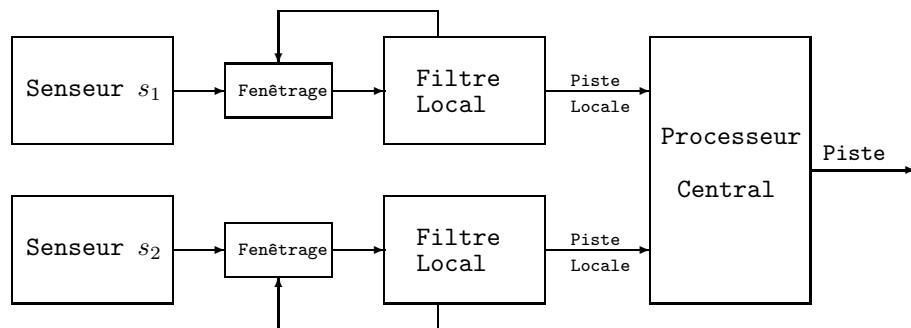
## 2. La fusion distribuée



Cette architecture permet d'obtenir le même résultat en ne transférant à un filtre central que les états estimés et leurs covariances d'erreur obtenues par des filtres locaux traitant les mesures de chaque senseur. Le résultat de la fusion étant ensuite **renvoyé vers les filtres locaux**.

L'architecture distribuée est très intéressante car elle permet de réduire le flux d'informations vers le filtre central. Elle sera donc préférée à l'architecture centralisée si les modules de pistage locaux permettent de prendre en compte les informations retournées par le filtre central. Les traitements développés ici gèrent les fausses alarmes et permettent également d'intégrer des informations issues de la reconnaissance, ceci étant d'une aide précieuse pour gérer les problèmes d'association.

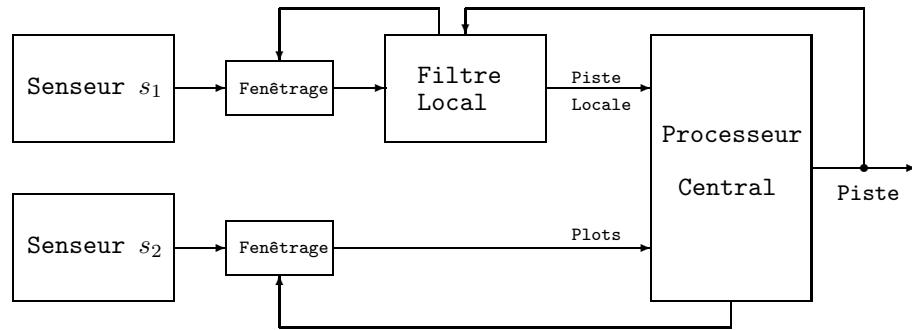
- **Le pistage multi-senseurs par fusion de pistes**



Dans ce cas, chaque senseur et processeur associé effectue un pistage. Le résultat obtenu étant transmis au niveau du processeur central chargé de fusionner ces informations. Il n'y a pas de retour de boucle de retour d'information vers les filtres de pistage locaux. Cette architecture est **sous-optimale** par rapport aux architectures précédentes. Cependant, elle est très souple car elle

permet d'une part, de limiter les flux d'informations, et d'autre part, d'exploiter des senseurs qui ne permettent pas d'accéder à la mesure ou d'intervenir sur la fonction pistage (senseurs rustiques, anciens ...). Le principe de la fusion ainsi que le problème de l'appariement des pistes sont traités dans ce paragraphe.

- **Le pistage multi-senseurs par fusion pistes/plots**



Dans certains systèmes multi-senseurs hétérogènes, les pistes sont initialisées et maintenues à partir de senseurs infra-rouge (IR). Les mesures (plots) radars servent d'informations complémentaires pour à confirmer ou infirmer les pistes IR. Ce type d'approche peut être rattaché aux techniques classiques de la trajectographie mono-senseur par pistage PDAF.

- **Association optimale de données multi-senseurs**

Nous présenterons un algorithme récent d'association optimale des données multi-senseurs visant à sélectionner les cibles vues par les différents senseurs. La méthode est une méthode d'optimisation combinatoire issue de la recherche opérationnelle.

- **Méthodes de gestion de piste**

Les algorithmes, que l'on vient succinctement de présenter, permettent de créer des pistes intégrant les informations issues de différents senseurs. Il est clair que toutes ces méthodes de fusion de pistes ou de fusion de plots n'ont de sens que si les informations que l'on cherche à fusionner représentent effectivement bien la même cible. En parallèle du problème de la fusion, se pose, donc, le problème de la qualification des pistes locales et/ou globales obtenues : s'agit-il de pistes correspondant à de vraies cibles, de fausses pistes, ou de pistes fantôme (dans le cas d'un système multi-senseurs infrarouge) ? Nous présenterons ici un certain nombre d'outils permettant de traiter le problème de la gestion des pistes.

En complément de ce chapitre, nous conseillons les références [WL90, Hal92, BSL95, Bel98]. Une terminologie pour le pistage multi-senseurs est donnée en [Dru93b].

## 6.1 Modélisation des cibles au niveau des senseurs

La modélisation de la dynamique des cibles et de leurs observations par un système de surveillance multi-senseurs, quel qu'il soit, dépend intimement de la nature des cibles, des senseurs et aussi de l'architecture de traitement choisi. On suppose dans la suite, que la modélisation (dynamique et observations) d'une cible correspond à un des deux types suivants :

1. Modélisation avec Modèles Locaux Identiques (**MLI**)
2. Modélisation avec Modèles Locaux Réduits (**MLR**)

### 6.1.1 Cas de la modélisation avec modèles locaux identiques

Dans cette modélisation, on suppose que l'état d'une cible  $t$  est modélisé selon un processus de Gauss-Markov du type :

$$\mathbf{x}^t(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}^t(k) + \mathbf{v}^t(k) \quad (6.1)$$

où  $\mathbf{x}^t(k)$  est l'état global de la cible  $t$  à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{F}(k)$  représente la matrice de transition de l'état de la cible et  $\mathbf{v}^t(k)$  est un processus aléatoire blanc et gaussien centré et de covariance connue

$$E[\mathbf{v}^t(k)\mathbf{v}^t(j)'] = \mathbf{Q}^t(k)\delta_{kj} \quad (6.2)$$

$\delta_{kj}$  est la fonction delta de Kronecker qui vaut 1 si  $k = j$  ou 0 sinon .

Cette modélisation est adoptée aussi bien au niveau global qu'au niveau de chaque organe de traitement local (dans le cas des architectures distribuées) et on la désigne sous l'acronyme de modélisation **MLI** (modélisation à Modèles Locaux Identiques).

Les mesures issues d'un senseur  $i$  relativement à une cible  $t$  sont modélisées par l'équation de mesure suivante :

$$\mathbf{z}^{i,t}(k) = \mathbf{H}^{i,t}\mathbf{x}^t(k) + \mathbf{w}^i(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{H}^{i,t}(k)$  représente la matrice d'observation de la cible  $t$  liée au senseur  $i$  et  $\mathbf{w}^i(k)$  représente le bruit de mesure du senseur  $i$ . Ce bruit est supposé gaussien centré indépendant de  $\mathbf{v}^t(k)$  et de covariance connue

$$E[\mathbf{w}^i(k)\mathbf{w}^i(j)'] = \mathbf{R}^i(k)\delta_{kj} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 Cas de la modélisation avec modèles locaux réduits

Dans cette modélisation, appelée modélisation **MLR** (modélisation à Modèles Locaux Réduits), on suppose que la dynamique d'une cible  $t$  au niveau central et que son observation par un senseur  $i$  est modélisée par

$$\mathbf{x}^t(k+1) = \mathbf{F}^t(k)\mathbf{x}^t(k) + \mathbf{v}^t(k) \quad (6.5)$$

$$\mathbf{z}^{i,t}(k) = \mathbf{H}^{i,t}(k)\mathbf{x}^t(k) + \mathbf{w}^i(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

$\mathbf{x}^t(k)$  est l'état de la cible  $t$  au niveau **global** à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{F}^t(k)$  représente la matrice de transition de l'état global de la cible  $t$  et  $\mathbf{v}^t(k)$  est un processus aléatoire blanc, gaussien, centré de covariance connue  $\mathbf{Q}^t(k)$ ,  $\mathbf{Q}^t(k) \geq 0$ .  $\mathbf{w}^i(k)$  représente le bruit de mesure du senseur  $i$ . Ce bruit est supposé gaussien centré indépendant de  $\mathbf{v}^t(k)$  et de covariance connue  $\mathbf{R}^i(k)$ .

Dans le cas des systèmes distribués, la dynamique et l'observation d'une cible  $t$  sont modélisées, au niveau local (pour chaque organe de traitement local associé à chaque senseur  $i$ ), par un modèle local réduit du type

$$\mathbf{x}^{i,t}(k+1) = \mathbf{F}^{i,t}(k)\mathbf{x}^{i,t}(k) + \mathbf{v}^{i,t}(k) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{z}^{i,t}(k) = \mathbf{H}_L^{i,t}(k)\mathbf{x}^{i,t}(k) + \mathbf{w}^i(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

$\mathbf{x}^{i,t}(k)$  est l'**état réduit** (ou état local) de la cible  $t$  au niveau local (du  $i$ ème senseur) à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{F}^{i,t}(k)$  représente la matrice de transition de l'état local de la cible  $t$  et  $\mathbf{v}^{i,t}(k)$  est un processus aléatoire blanc et gaussien centré et de covariance connue  $\mathbf{Q}^{i,t}(k)$ ,  $\mathbf{Q}^{i,t}(k) \geq 0$ .  $\mathbf{H}_L^{i,t}$  est la matrice d'observation locale de la cible  $t$  par le senseur  $i$ .

On suppose en outre que le bruit de mesure est correctement modélisé au niveau des noeuds. Par conséquent  $\mathbf{w}^i(k)$  apparaissant dans (6.8) est supposé identique au bruit de mesure  $\mathbf{w}^i(k)$  de la modélisation globale dans (6.6).

### 6.1.3 Remarques

Les deux modélisations précédentes ont ici été supposées linéaires afin de simplifier la présentation des méthodes qui va suivre. Il est bien entendu que ces modèles peuvent aisément être généralisés au cas des modèles à dynamique et observations **non linéaires**. Les matrices  $\mathbf{F}(k)$  et  $\mathbf{H}(k)$  seront alors remplacées par les fonctions non linéaires judicieusement choisies  $\mathbf{f}[:, k]$  et  $\mathbf{h}[:, k]$ . Les équations des méthodes de pistage proposées seront toujours utilisables en mettant en œuvre les techniques de linéarisation au 1er ou 2ème ordre des modèles selon une approche identique à celle du **filtrage de Kalman étendu** (EKF). Par ailleurs, il faut souligner d'ores et déjà que la modélisation MLI apparaît en fait comme un cas particulier

de la modélisation MLR. Les équations de pistage proposées avec la modélisation MLR couvrent donc potentiellement un champ d'application beaucoup plus large que les équations basées sur la modélisation MLI généralement adoptée dans la littérature.

#### 6.1.4 Notations

Dans un cadre plus général, on supposera que l'on dispose, à chaque instant  $k$ , non pas d'une mesure unique  $\mathbf{z}^{i,t_n}(k)$  représentative de chaque cible d'intérêt  $t_n$  ( $n = 1$  à  $T$ ), mais d'un ensemble de  $m_k^i$  mesures disponibles  $\mathbf{z}_j^i(k)$  représentatives de l'univers observé par chaque senseur  $i$ . L'origine des mesures est diverse : cibles, fausses alertes, clutter, etc ... On supposera cependant, pour simplifier l'analyse, **qu'au plus une mesure est associée à chaque cible** d'intérêt  $t_n$ . L'ensemble des mesures délivrées à l'instant  $k$  par le senseur  $i$  (toutes origines confondues) est noté :

$$\boxed{\mathbf{Z}^i(k) = \{\mathbf{z}_j^i(k)\}_{j=1}^{m_k^i}} \quad (6.9)$$

L'ensemble des mesures délivrées par le senseur  $i$  depuis l'instant 1 jusqu'à l'instant  $k$  est noté

$$\boxed{\mathbf{Z}^{i,k} = \{\mathbf{Z}^i(l)\}_{l=1}^k} \quad (6.10)$$

Pour alléger les notations, l'indice de cible  $t$  sera volontairement omis dans la suite si aucune ambiguïté de notation n'apparaît et en particulier pour le cas des méthodes traitant de la poursuite mono-cible.

## 6.2 Pistage par architectures centralisées et distribuées

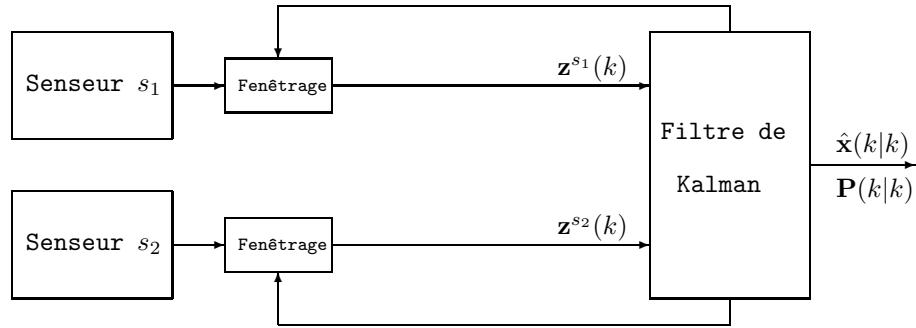
Pour simplifier, on supposera d'abord que les mesures issues des différents senseurs sont disponibles aux mêmes instants (**synchronisme des capteurs**) et que l'origine des mesures n'est pas mise en doute. On suppose donc a priori que l'association des mesures délivrées par les différents senseurs avec les différentes cibles à pister est déjà réalisée. On examine alors les différentes architectures possibles de traitement des informations.

L'hypothèse d'association parfaite des données est bien sûr très restrictive en pratique et des traitements aptes à s'en affranchir seront proposés au paragraphe suivant. L'hypothèse de synchronisme des mesures est une hypothèse moins forte car elle peut toujours être théoriquement satisfaite en extrapolant les mesures à une référence de temps commune aux différents senseurs. On étend les architectures au cas du pistage en environnement dégradé.

### 6.2.1 Filtre de Kalman avec fusion centralisée des mesures

Cette architecture de traitement consiste à prendre en compte à chaque instant et de **façon simultanée** les **mesures issues des différents senseurs**  $s_1, s_2, \dots, s_{N_s}$  ( $N_s$  désignant le nombre total de senseurs du système). Ceci revient à construire un filtre de Kalman dont le **vecteur de mesure**  $\mathbf{z}(k)$  n'est rien d'autre que le vecteur empilé des différents vecteurs de mesures  $\mathbf{z}^i(k)$   $i = 1, \dots, N_s$ .

Le schéma de principe de ce traitement est le suivant :



Les équations du **filtre de Kalman (étendu) centralisé**, appelé encore filtre à structure parallèle, sont alors données par :

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), k] \quad (6.11)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (6.12)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)' + \mathbf{R}(k) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}(k)'\mathbf{S}(k)^{-1} \quad (6.14)$$

#### Partie correction du filtre centralisé

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) \quad (6.15)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (6.16)$$

#### Partie prédition du filtre centralisé

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(k|k), k] \quad (6.17)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}(k)' + \mathbf{Q}(k) \quad (6.18)$$

avec

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{N_s}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^1[\mathbf{x}(k), k] \\ \vdots \\ \mathbf{h}^{N_s}[\mathbf{x}(k), k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}^1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}^{N_s}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{w}(k) \quad (6.19)$$

et

$$\mathbf{R}(k) = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(k)'] \quad (6.20)$$

$$\mathbf{F}(k) = [\nabla \mathbf{f}'[\mathbf{x}(k), k]]'_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{H}(k) = [\nabla \mathbf{h}'[\mathbf{x}(k), k]]'_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)} \quad (6.22)$$

### Autre formulation intéressante possible

En utilisant la forme **information du filtre de Kalman**, les équations de mise à jour s'écrivent :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\bar{\mathbf{z}}(k|k-1)} \quad (6.23)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \mathbf{H}(k)'\mathbf{R}(k)^{-1}\mathbf{H}(k)} \quad (6.24)$$

avec

$$\boxed{\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k)\mathbf{H}(k)'\mathbf{R}(k)^{-1}} \quad (6.25)$$

Les équations précédentes sont celles du filtre basé sur une modélisation générale non linéaire de la dynamique et de l'observation de la cible d'intérêt.

### Cas particulier des senseurs à bruits non corrélés

Dans le cas particulier où les senseurs ont des **bruits de mesures non corrélés** la matrice  $\mathbf{R}(k)$  est diagonale par bloc

$$\boxed{\mathbf{R}(k) = \text{diag} [\mathbf{R}^1(k), \dots, \mathbf{R}^{N_s}(k)]} \quad (6.26)$$

Par conséquent  $\mathbf{R}(k)^{-1}$  est aussi diagonale par bloc avec

$$\mathbf{R}(k)^{-1} = \text{diag} [\mathbf{R}^1(k)^{-1}, \dots, \mathbf{R}^{N_s}(k)^{-1}] \quad (6.27)$$

Les équations de mise à jour du filtre peuvent alors s'écrire

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}^i(k) [\mathbf{z}^i(k) - \mathbf{h}^i[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), k]]} \quad (6.28)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{H}^i(k)'\mathbf{R}^i(k)^{-1}\mathbf{H}^i(k)} \quad (6.29)$$

avec pour  $i = 1, \dots, N_s$

$$\mathbf{R}^i(k) = E[\mathbf{w}^i(k)\mathbf{w}^i(k)'] \quad (6.30)$$

$$\mathbf{H}^i(k) = [\nabla \mathbf{h}^{i'}[\mathbf{x}(k), k]]'_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)} \quad (6.31)$$

$$\mathbf{K}^i(k) = \mathbf{P}(k|k)\mathbf{H}^i(k)'\mathbf{R}^i(k)^{-1} \quad (6.32)$$

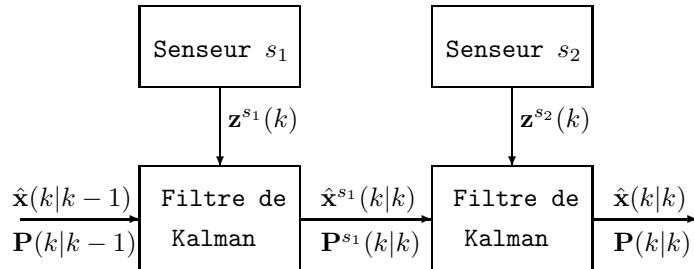
On notera que la forme particulière des équations (6.28) et (6.29) suggère un **traitement pseudo-séquentiel** des données (cf section suivante).

### 6.2.2 Filtre de Kalman avec fusion pseudo-séquentielle des mesures

Dans l'architecture centralisée du filtrage de Kalman, la mise à jour de l'état est obtenue à partir de l'ensemble des mesures  $\mathbf{z}(k)$ . C'est un traitement central par bloc de mesures. Ce traitement peut être également réalisé de manière **pseudo-séquentielle si les bruits de mesure des différents senseurs sont non corrélés**. Ceci impose, dans le cas de bruits gaussiens, **d'avoir une matrice  $\mathbf{R}(k)$  diagonale par bloc**

$$\mathbf{R}(k) = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(j)'] = \text{diag}[\mathbf{R}^1(k), \dots, \mathbf{R}^{N_s}(k)] \quad (6.33)$$

Sous cette condition, la mise à jour peut être réalisée de manière pseudo-séquentielle; c'est à dire en utilisant successivement les mesures des différents senseurs conformément au schéma de principe de la figure ci-dessous.



La mise à jour de l'état d'une cible est alors donnée par la séquence de traitement suivante. On part de l'état prédict  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  et de sa covariance prédictive  $\mathbf{P}(k|k-1)$  à l'étape antérieure et on pose

$$\hat{\mathbf{x}}^0(k|k) \triangleq \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (6.34)$$

$$\mathbf{P}^0(k|k) \triangleq \mathbf{P}(k|k-1) \quad (6.35)$$

Puis on effectue la séquence d'opérations suivante pour  $i = 1, \dots, N_s$

$$\mathbf{S}^i(k) = \mathbf{H}^i(k)\mathbf{P}^{i-1}(k|k)\mathbf{H}^i(k)' + \mathbf{R}^i(k) \quad (6.36)$$

$$\mathbf{K}^i(k) = \mathbf{P}^{i-1}(k|k)\mathbf{H}^i(k)'\mathbf{S}^i(k)^{-1} \quad (6.37)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{i-1}(k|k) + \mathbf{K}^i(k) [\mathbf{z}^i(k) - \mathbf{h}^i[\hat{\mathbf{x}}^{i-1}(k|k), k]] \quad (6.38)$$

$$\mathbf{P}^i(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^i(k)\mathbf{H}^i(k)]\mathbf{P}^{i-1}(k|k) \quad (6.39)$$

L'estimée  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  et sa covariance associée  $\mathbf{P}(k|k)$  incorporant toutes les mesures sont alors données par

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{N_s}(k|k) \quad (6.40)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}^{N_s}(k|k) \quad (6.41)$$

Le calcul pseudo-séquentiel de l'état estimé (6.40) qui vient d'être décrit est rigoureusement équivalent **dans le cas des modèles linéaires** à l'équation de mise à jour

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}^i(k) [\mathbf{z}^i(k) - \mathbf{h}^i[\hat{\mathbf{x}}^{i-1}(k|k)]]} \quad (6.42)$$

Ce type de traitement est **bien adapté aux cas des systèmes multi-senseurs spatialement distribués** où les bruits de mesures peuvent généralement être considérés indépendants d'un senseur à l'autre.

### Cas des senseurs à bruits corrélés

Dans le cas où les bruits de mesures sont corrélés ( $\mathbf{R}(k)$  non diagonale par bloc), **on peut toujours appliquer une transformation linéaire sur les mesures** afin de diagonaliser  $\mathbf{R}(k)$  et pouvoir appliquer le traitement pseudo-séquentiel. Une méthode efficace de diagonalisation de  $\mathbf{R}(k)$  est la méthode de **factorisation de Cholesky** qui permet d'écrire  $\mathbf{R}(k)$  sous la forme

$$\boxed{\mathbf{R}(k) = \mathbf{L}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{L}(k)'} \quad (6.43)$$

où  $\mathbf{L}(k)$  est une matrice triangulaire inférieure et  $\mathbf{D}(k)$  est une matrice diagonale ayant des éléments positifs ou nuls. Le vecteur de mesure en bloc  $\mathbf{z}(k)$  est alors modifié en vecteur  $\check{\mathbf{z}}(k)$  par la transformation linéaire

$$\check{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{L}(k)^{-1}\mathbf{z}(k) \quad (6.44)$$

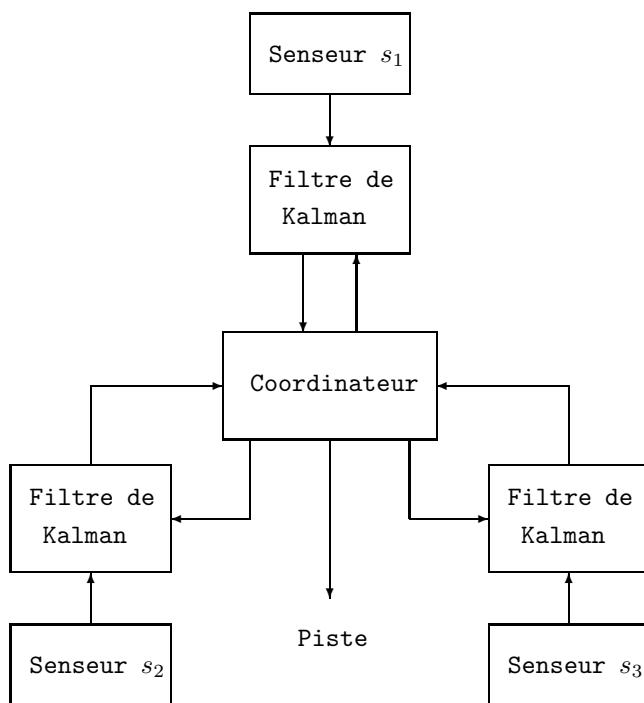
et la matrice  $\mathbf{H}(k)$  en

$$\check{\mathbf{H}}(k) = \mathbf{L}(k)^{-1}\mathbf{H}(k) \quad (6.45)$$

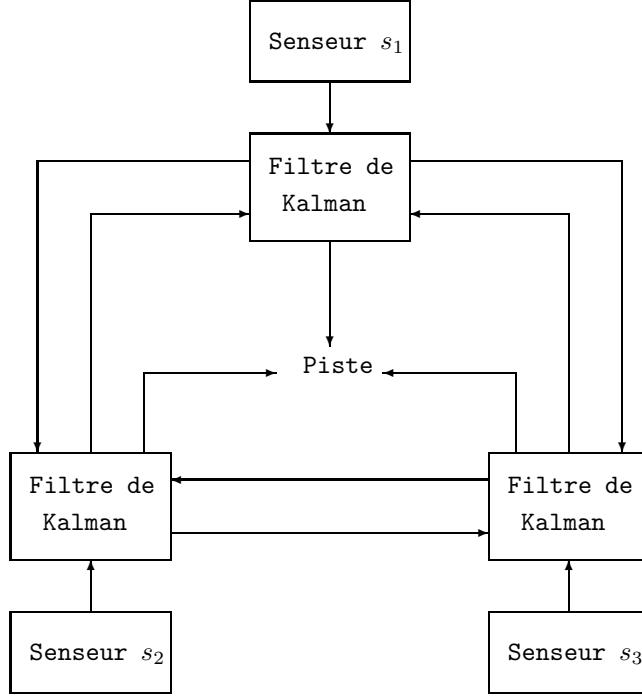
Le traitement pseudo-séquentiel peut ensuite être appliqué avec ces mesures modifiées.

### 6.2.3 Présentation du filtre de Kalman avec architecture distribuée

Dans cette approche, l'architecture du système multi-senseurs (**MS** pour simplifié) est supposée de type **distribuée**. On parle alors d'architecture **DSN** (**Distributed Sensor Networks**). Le principe de fonctionnement le plus simple d'un DSN consiste à associer à chaque senseur un organe de traitement local, appelé **processeur local**, dont la fonction est d'estimer l'état des cibles uniquement à partir des mesures délivrées par le senseur auquel il est associé. L'ensemble senseur/processeur local constitue un **nœud du système distribué**. Chaque nœud du système communique périodiquement son estimée locale à un processeur unique, appelé **processeur de fusion global** ou **coordinateur**, au travers d'un réseau de communication. Le coordinateur est chargé de **combiner** (**fusionner**) les estimées locales des différents nœuds en une **estimée globale** de l'état associée à chaque cible d'intérêt. Les estimées globales sont ensuite **retransmises à chaque nœud** du DSN conformément au schéma de principe de la figure suivante pour le cas d'une architecture à 3 senseurs



Cette architecture de DSN n'est bien évidemment pas unique et d'autres architectures sont possibles selon le type de réseau de communication utilisé et la robustesse du système que l'on souhaite. En effet, on peut, par exemple, aussi envisager une structure de DSN plus complexe et sans coordinateur (voir figure suivante) dans laquelle chaque nœud est directement connecté aux autres et où chaque processeur local joue alors le rôle de coordinateur. Cette architecture présente alors l'avantage de rendre le DSN plus fiable face aux pannes ou à une destruction partielle du système mais au prix d'un coût élevé en calculs et moyens de communication à mettre en œuvre.



Un grand nombre de combinaisons intermédiaires d’architectures de DSN sont bien sûr possibles entre celle présentée sur la figure ?? de la section 6.2.1 et la figure précédente. Abstraction faite de l’architecture envisagée du DSN, nous rappelons ici le principe général de la fusion distribuée que doit réaliser le processeur de fusion. On s’intéresse d’abord au cas particulier où l’on suppose disposer d’une même représentation d’état (même dynamique) au niveau du processeur global qu’au niveau des processeurs locaux (i.e. modélisation **MLI**). Les équations optimales de la fusion distribuée sont ensuite explicitées au cas plus général de la modélisation **MLR**.

#### 6.2.4 Filtre de Kalman distribué avec modélisation MLI

Le cas le plus simple de représentation du système physique dynamique observé correspond à celui où la dynamique de la cible est représentée de manière unique au niveau des noeuds et au niveau du processeur de fusion. Ceci correspond, par définition, à une modélisation à Modèles Locaux Identiques (modélisation **MLI**) du système décrite en 6.1. L’équation d’évolution de la dynamique d’une cible est donnée par (6.1) et les observations délivrées par chaque senseur  $i$  concernant la cible vérifient (6.3).

### Equations optimales de la fusion distribuée (Chong 1979)

L'estimée locale à variance minimale au niveau d'un nœud  $i$  de l'état d'une cible (l'indice  $t$  de la cible est volontairement omis ici) est donnée par l'espérance conditionnelle

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{Y}^{i,k}] = \int \mathbf{x}(k)p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{Y}^{i,k})d\mathbf{x}(k) \quad (6.46)$$

où  $\mathbf{Y}^{i,k} = \{\mathbf{Y}^i(l)\}_{l=1}^k$  et  $\mathbf{Y}^i(l)$  désigne l'information reçue (statistique suffisante) par le nœud  $i$  durant la période d'échantillonnage de  $l-1$  à  $l$ .  $\mathbf{Y}^i(l)$  représente l'information transmise par le processeur de fusion et disponible au nœud  $i$  à l'instant  $l$ . En fait,  $\mathbf{Y}^i(l)$  résume toutes les informations issues des autres nœuds jusqu'au temps  $l-1$  car cette information est envoyée au processeur de fusion entre les instants  $l-1$  et  $l$ .

En supposant un **réseau de communication sans perte**, la statistique suffisante  $\mathbf{Y}^{i,k}$  est théoriquement équivalente à toutes les mesures délivrées par les senseurs jusqu'au temps  $k-1$  et l'on a

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = \int \mathbf{x}(k)p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{Z}^{\bar{i},k-1})d\mathbf{x}(k) \quad (6.47)$$

où  $\bar{i}$  désigne les senseurs autres que  $i$ .

Au niveau du **processeur de fusion**, l'estimée **globale à variance minimale** de l'état d'une cible est donnée par

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \int \mathbf{x}(k)p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{N_s,k})d\mathbf{x}(k) \quad (6.48)$$

Le **problème de la fusion distribuée** consiste alors à reconstruire l'estimée globale  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  à partir de la connaissance des estimées locales  $\hat{\mathbf{x}}^i(k|k)$   $i = 1, \dots, N_s$ .

En **supposant l'association parfaite des données** (c.a.d. une connaissance parfaite de l'origine des mesures délivrées par chaque senseur) et en utilisant la forme information du filtrage de Kalman, l'estimée locale d'une cible au niveau d'un nœud  $i$  est donnée par (l'indice de cible  $t$  est ici omis pour alléger les notations) :

$$\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} = \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} + \mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}^i(k) \quad (6.49)$$

$$\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) + \mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k) \quad (6.50)$$

Ce qui permet d'écrire directement

$$\mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}^i(k) = \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \quad (6.51)$$

$$\mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k) = \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) \quad (6.52)$$

Par ailleurs, l'estimée centralisée optimale est donnée par

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}^i(k) \quad (6.53)$$

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k) \quad (6.54)$$

En remplaçant directement  $\mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}^i(k)$  et  $\mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k)$  par (6.51) et (6.52) dans (6.53) et (6.54), il vient les **équations optimales de la fusion distribuée** [Cho79]

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_s} [\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1}]} \quad (6.55)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} [\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1)]} \quad (6.56)$$

Ces équations peuvent aussi être obtenues directement à partir de l'expression de la **densité a posteriori globale de l'état**, en supposant :

1. identiques les densités conditionnelles a priori ( $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{i,k-1}) = p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})$ ) au niveau des nœuds et du processeur de fusion
2. connues les densités conditionnelles a posteriori au niveau des nœuds  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^i(k), \mathbf{Z}^{k-1})$
3. indépendantes les mesures d'un senseur à l'autre conditionnellement à l'état vrai  $\mathbf{x}(k)$  de la cible

La densité a posteriori *globale* de l'état peut se décomposer par la règle d'inférence bayésienne classique sous la forme

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k) &= \frac{1}{c} p(\mathbf{Z}(k)|\mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) \\ &= \frac{1}{c} \frac{\prod_{i=1}^{N_s} [p(\mathbf{z}^i(k)|\mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})]}{[p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})]^{N_s-1}} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\prod_{i=1}^{N_s} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^i(k), \mathbf{Z}^{k-1})}{[p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})]^{N_s-1}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

où la constante de normalisation  $c$  vaut

$$c = \int \frac{\prod_{i=1}^{N_s} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^i(k), \mathbf{Z}^{k-1})}{[p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})]^{N_s-1}} d\mathbf{x}(k) \quad (6.58)$$

On peut remarquer alors que la densité globale a posteriori (6.57) est obtenue par la combinaison (multiplication) des **densités locales** et l'extraction (division) de la densité globale (commune) a priori. On peut vérifier facilement, que dans le cas de densités gaussiennes l'équation (6.57) se réduit aux relations (6.61) et (6.62) précédentes.

En résumé, on voit qu'il est fondamental de soustraire l'information redondante pour effectuer correctement la fusion des données. Dans le cas contraire, un biais apparaîtra inévitablement dans le résultat du processus de fusion.

Dans le cas **non linéaire** (filtrage PDAF, JPDAF etc), les équations optimales de fusion ne peuvent malheureusement plus être exprimées par une simple combinaison linéaire des estimées locales comme nous le verrons.

### 1ère forme particulière des équations de fusion distribuée

Quand **tous les nœuds possèdent les mêmes estimées a priori** pour  $i = 1, \dots, N_s$ , c.à.d.

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (6.59)$$

$$\mathbf{P}^i(k|k-1) = \mathbf{P}(k|k-1) \quad (6.60)$$

Les équations (6.55) et (6.56) de la fusion distribuée optimale **se réduisent à**

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} - (N_s - 1)\mathbf{P}(k|k-1)^{-1}} \quad (6.61)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1}\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{P}^i(k|k)^{-1}\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - (N_s - 1)\mathbf{P}(k|k-1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)} \quad (6.62)$$

La relation (6.61) met clairement en évidence le fait que **l'information redondante commune  $\mathbf{P}(k|k-1)$**  est retirée automatiquement dans l'opération (linéaire) de la fusion distribuée.

### 2ème forme possible des équations de fusion distribuée

On suppose que tous les nœuds possèdent les mêmes estimées a priori, mais n'ont pas les mêmes covariances ; Le traitement local au niveau d'un noeud  $i$  est donné par (6.49) et (6.50) mais avec

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (6.63)$$

$$\mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} = \alpha_i \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \quad (6.64)$$

$$\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i = 1 \quad \alpha_i > 0 \quad (6.65)$$

Les coefficients  $\alpha_i$  intervenant dans chaque nœud peuvent être choisis arbitrairement. Généralement, on prend  $\alpha_i = 1/N_s$ . Il faut cependant savoir que l'introduction des coefficients  $\alpha_i$  au niveau de l'équation (6.64) **introduit nécessairement une inconsistance entre l'estimée a priori  $\hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1)$  et la matrice de covariance  $\mathbf{P}^i(k|k-1)$** . Au niveau du processeur de fusion, les équations sont toujours

données par

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \quad (6.66)$$

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \quad (6.67)$$

### 6.2.5 Filtre de Kalman distribué avec modélisation MLR

On se place ici dans le cadre plus général où **l'état complet de la cible n'est pas connu au niveau de chaque noeud mais uniquement au niveau du coordinateur**. Cette modélisation, appelée modélisation à Modèles Locaux Réduits (MLR) est décrite en 6.1.

Au niveau global, la dynamique de la cible modélisée par (6.5) et son observation par un senseur  $i$  par (6.6). Ce modèle est connu au niveau du processeur de fusion.

Au niveau de chaque noeud  $i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), la dynamique de la cible et son observation sont modélisées par un modèle local réduit décrit par (6.7) et (6.8).

Si l'on cherche les équations optimales de la fusion distribuée dans le cas d'une modélisation MLR des cibles, alors **le choix des modèles locaux ne peut être arbitraire** [AB85, Alo86, AB86, Alo87b]. Chaque modèle local doit impérativement satisfaire une certaine contrainte algébrique [AB88, Alo90] pour permettre la reconstruction de l'estimée optimale de l'état global  $\mathbf{x}(k)$  à partir des estimées locales. Cette contrainte est en fait une **condition d'existence, pour chaque modèle local, d'une transformation linéaire**  $\mathbf{L}^i(k) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x^i}}$  telle que [WBC<sup>+</sup>82], [Alo86]

$$\boxed{\mathbf{H}^i(k) = \mathbf{H}_L^i(k)\mathbf{L}^i(k) \quad k = 1, 2, \dots} \quad (6.68)$$

#### Équations optimales générales de la fusion distribuée (Alouani 1986)

En supposant **l'association parfaite des données** (c.a.d. une connaissance parfaite de l'origine des mesures délivrées par chaque senseur) et en utilisant la forme information du filtrage de Kalman, l'estimée locale d'une cible au niveau d'un noeud  $i$  est donnée par :

$$\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} = \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} + \mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}_L^i(k) \quad (6.69)$$

$$\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) + \mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}_L^i(k) \quad (6.70)$$

Ce qui permet d'écrire directement

$$\mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}_L^i(k) = \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \quad (6.71)$$

$$\mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k) = \mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) \quad (6.72)$$

Par ailleurs, l'estimée globale (centralisée) optimale est donnée par

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}^i(k) \quad (6.73)$$

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{H}^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k) \quad (6.74)$$

En tenant compte de la contrainte (6.68) dans (6.73) et (6.74), on a

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{L}^i(k)' \mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{H}_L^i(k) \mathbf{L}^i(k) \quad (6.75)$$

$$\mathbf{P}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{L}^i(k)' \mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{R}^i(k)^{-1} \mathbf{z}^i(k) \quad (6.76)$$

En utilisant (6.71) et (6.72) dans (6.75) et (6.76), il vient finalement les **équations générales optimales de la fusion distribuée**

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{L}^i(k)' [\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1}] \mathbf{L}^i(k)} \quad (6.77)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{L}^i(k)' [\mathbf{P}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1)]} \quad (6.78)$$

Ces équations optimales de la fusion distribuée découlent directement de l'expression de la densité conditionnelle de l'état  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}(k))$  qui est obtenue par la règle d'inférence bayésienne classique par

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k) &= \frac{1}{c} p(\mathbf{Z}(k)|\mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) \\ &= \frac{1}{c} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) \prod_{i=1}^{N_s} \left[ p(\mathbf{z}^i(k)|\mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) \right] \\ &= \frac{1}{c} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) \prod_{i=1}^{N_s} \left[ p(\mathbf{z}^i(k)|\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k), \mathbf{Z}^{k-1}) \right] \\ &= \frac{1}{c} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) \prod_{i=1}^{N_s} \left[ \frac{p(\mathbf{z}^i(k), \mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k), \mathbf{Z}^{k-1})}{p(\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k), \mathbf{Z}^{k-1})} \right] \\ &= \frac{1}{c} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}) \frac{\prod_{i=1}^{N_s} p(\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k)|\mathbf{z}^i(k), \mathbf{Z}^{k-1})}{\prod_{i=1}^{N_s} p(\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k)|\mathbf{Z}^{k-1})} \end{aligned} \quad (6.79)$$

où la constante de normalisation  $c$  vaut

$$c = \int \frac{\prod_{i=1}^{N_s} p(\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k)|\mathbf{z}^i(k), \mathbf{Z}^{k-1})}{\prod_{i=1}^{N_s} p(\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k)|\mathbf{Z}^{k-1})} d\mathbf{x}(k) \quad (6.80)$$

et où  $\mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k)$  est un opérateur linéaire connu

$$\boxed{\mathbf{x}^i(k) \triangleq \mathbf{L}^i(\mathbf{x}(k), k) = \mathbf{L}^i \mathbf{x}(k)} \quad (6.81)$$

Il est facile de vérifier que les équations de fusion (6.77) et (6.78) coïncident exactement avec les équations de fusion précédentes (6.55) et (6.56) quand l'opérateur  $\mathbf{L}^i$  coïncide avec l'opérateur (matrice) identité  $\mathbf{I}^i$ . La densité (6.79) est alors identique à (6.57). Ces équations de fusion constituent donc les équations **optimales générales de la fusion distribuée**.

### 6.2.6 Filtre sous-optimal PDAF multi-senseurs

Dans le cas du pistage mono-cible multi-senseurs en environnement dégradé, la fusion directe des mesures (PDAF multi-senseurs à architecture centralisée) est pratiquement impossible à réaliser à cause de la combinatoire très élevée du problème d'association des mesures délivrées par les senseurs. Ce problème pourra être résolu théoriquement par des méthodes d'optimisation combinatoire sophistiquées (cf plus loin). L'idée la plus simple [HBS89] consiste à utiliser une mise à jour de l'état de la cible avec des filtres PDAF exploitant **séquentiellement les mesures de chaque senseur**. Comme on ne prend pas simultanément en compte **toute** l'information disponible pour la mise à jour de la piste, l'approche n'est pas optimale. Elle est cependant simple à mettre en œuvre et peut donner des résultats intéressants dans des environnements pas trop dégradés. Le principe général de cet algorithme appelé **MSPDAF** consiste pour le cas de 2 senseurs en les étapes suivantes :

1. A partir de l'estimation  $\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$  et de  $\mathbf{P}(k-1|k-1)$  obtenue à l'instant  $k-1$ , on prédit l'état  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ ,  $\mathbf{P}(k|k-1)$  et la mesure attendue  $\hat{\mathbf{z}}^{s_1}(k|k-1)$  pour le 1er senseur  $s_1$ .
2. Avec  $\hat{\mathbf{z}}^{s_1}(k|k-1)$  et  $\mathbf{S}^{s_1}(k)$  et les mesures  $\mathbf{Z}^{s_1}(k)$  validées par le 1er senseur, on met en œuvre un premier filtre PDAF. On obtient une première mise à jour de l'état  $\hat{\mathbf{x}}^{s_1}(k|k)$  et de  $\mathbf{P}^{s_1}(k|k)$ .
3. A partir de  $\hat{\mathbf{x}}^{s_1}(k|k)$  et de  $\mathbf{P}^{s_1}(k|k)$ , on calcule la mesure attendue par le 2ième senseur  $\hat{\mathbf{z}}^{s_2}(k|k)$  et  $\mathbf{S}^{s_2}(k)$ . Avec les mesures validées par le 2ième senseur on met en œuvre un 2ième filtre PDAF pour obtenir la mise à jour finale  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) \equiv \hat{\mathbf{x}}^{s_2}(k|k)$  et  $\mathbf{P}(k|k) \equiv \mathbf{P}^{s_2}(k|k)$ . On continue la poursuite en retournant à l'étape no 1.

Dans le cas où les senseurs ne sont pas synchronisés, on doit les synchroniser artificiellement en itérant les équations de prédiction.

### 6.2.7 Filtre PDAF distribué avec modélisation MLR

Nous généralisons maintenant les équations optimales de la fusion distribuée au cas où les mesures délivrées par chaque senseur sont **d'origine incertaine**.

Nous considérons d'abord le cas du pistage mono-cible par un algorithme PDAF distribué avec une modélisation MLR, puis expliciterons les équations du filtrage au cas de la modélisation MLI de la cible.

Nous décrirons ensuite le principe des algorithmes de pistage multi-cibles du type JPDAF distribué avec modélisation MLR et/ou modélisation MLI des cibles.

### Hypothèses

On suppose d'emblée la modélisation de la dynamique et des observations de la cible de type **MLR** c'est à dire gouvernée par les équations (6.5) -(6.8). On suppose aussi vérifiée la contrainte algébrique (6.68) permettant l'obtention des équations optimales de la fusion distribuée à partir des modélisations locales réduites quand il n'existe pas d'incertitude sur l'origine des mesures.

### Forme générale des estimateurs PDAF locaux

Si à l'instant  $k$ , chaque senseur  $i$  délivre  $m_k^i$  mesures notées  $\mathbf{Z}^i(k) = \{\mathbf{z}_{j_i}^i(k)\}_{j_i=1}^{m_k^i}$  pouvant potentiellement être associées à la cible, alors au niveau du traitement local, l'estimée locale optimale "0-scan back"  $\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = E[\mathbf{x}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}]$  et sa covariance associée  $\mathbf{P}^i(k|k)$  sont données par le filtre PDAF de Bar-Shalom [BSF88] associé au senseur no  $i$ .

On rappelle d'abord les équations du PDAF construit au niveau local  $i$  (i.e. associé à un senseur  $i$ ). L'estimée locale s'écrit (cf section du PDAF) [BSF88]

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = E[\mathbf{x}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}] = \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \beta_{j_i}^i(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k)} \quad (6.82)$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \theta_{j_i}^i(k)]$  pour  $j_i \neq 0$  et  $j_i = 0$  donnés par

$$\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) + \mathbf{K}^i(k) \tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^i(k) \quad (6.83)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) \quad (6.84)$$

et les probabilités a posteriori d'associations  $\beta_{j_i}^i(k) \triangleq P(\theta_{j_i}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k})$  données par

$$\beta_0^i(k) = \frac{b^i}{b^i + \sum_{l_i=1}^{m_k^i} e_{l_i}^i} \quad (6.85)$$

$$\beta_{j_i}^i(k) = \frac{e_{j_i}^i}{b^i + \sum_{l_i=1}^{m_k^i} e_{l_i}^i} \quad \text{si } j_i \neq 0 \quad (6.86)$$

avec

$$e_{j_i}^i = \exp\{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^i(k)' \mathbf{S}^i(k)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^i(k)\} \quad (6.87)$$

$$b^i = (2\pi/\gamma)^{n_{z^i}/2} \lambda^i V^i(k) \frac{(1 - P_d^i P_g^i)}{P_d^i} \quad (6.88)$$

où

$$\mathbf{Z}^{i,k} \triangleq \{\mathbf{Z}^i(l)\}_{l=1}^k \quad (6.89)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^i(k) \triangleq \mathbf{z}_{j_i}^i(k) - \hat{\mathbf{z}}^i(k|k-1) \quad (6.90)$$

$$\hat{\mathbf{z}}^i(k|k-1) = \mathbf{H}_L^i(k) \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) \quad (6.91)$$

$$\mathbf{S}^i(k) = \mathbf{H}_L^i(k) \mathbf{P}^i(k|k) \mathbf{H}_L^i(k)' + \mathbf{R}^i(k) \quad (6.92)$$

$$\mathbf{K}^i(k) \triangleq \mathbf{P}^i(k|k-1) \mathbf{H}_L^i(k)' \mathbf{S}^i(k)^{-1} \quad (6.93)$$

et  $P_d^i$  représente la probabilité de détection de la cible ,  $P_g^i$  la probabilité de validation de la mesure correcte et  $\lambda^i$  la densité spatiale des fausses alarmes au niveau du senseur  $i$ .

La covariance de l'erreur d'estimation du PDAF classique est donnée **au niveau de chaque nœud** par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^i(k|k) &\triangleq E[[\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k)][\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k)]' | \mathbf{Z}^{i,k}] \\ &= \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \beta_{j_i}^i(k) E[[\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k)][\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k)]' | \mathbf{Z}^{i,k}, \theta_{j_i}^i(k)] \\ &= \beta_0^i(k) \mathbf{P}^i(k|k-1) + \sum_{j_i=1}^{m_k^i} \beta_{j_i}^i(k) \mathbf{P}_{j_i}^i(k|k) + \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k)' - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k) \hat{\mathbf{x}}^i(k|k)' \end{aligned} \quad (6.94)$$

avec

$$\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k) \triangleq E[[\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k)][\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k)]' | \mathbf{Z}^{i,k}, \theta_{j_i}^i(k)]$$

$$\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k) = \begin{cases} \mathbf{P}^i(k|k-1) & \text{pour } j_i = 0, \\ [\mathbf{I}^i - \mathbf{K}^i(k) \mathbf{H}_L^i(k)] \mathbf{P}^i(k|k-1) & \text{pour } j_i \neq 0. \end{cases} \quad (6.95)$$

### Forme générale de l'estimateur global

Connaissant l'ensemble des estimées locales  $\hat{\mathbf{x}}^i(k|k)$ ,  $\mathbf{P}^i(k|k)$  on cherche alors à construire l'estimée optimale globale  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ ,  $\mathbf{P}(k|k)$  donnée par

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}] = \sum_{j_1=0}^{m_1^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_s^s} \beta_{j_1, \dots, j_s}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$$

(6.96)

avec

$$\beta_{j_1, \dots, j_s}(k) \triangleq P(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}) \quad (6.97)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \theta_{j_1}^1(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \theta_{j_s}^s(k)] \quad (6.98)$$

$\theta_{j_i}^i(k)$  représente la réalisation de l'hypothèse d'association : "la  $j_i$ ème mesure du senseur  $i$  correspond à la cible".  $\beta_{j_1, \dots, j_s}(k)$  représente la probabilité a posteriori pour que les mesures  $\mathbf{z}_{j_1}^i, \dots, \mathbf{z}_{j_s}^s$  correspondent à la cible.  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$  représente l'estimée (conditionnelle) optimale globale de l'état quand  $\mathbf{z}_{j_1}^i, \dots, \mathbf{z}_{j_s}^s$  correspondent à la cible.

### Forme des estimateurs conditionné par les hypothèses d'associations

En supposant les **erreurs de mesure indépendantes entre les différents senseurs**, l'estimée globale peut alors être reconstruite à partir des équations générales de la fusion distribuée (6.77) et (6.78). On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) &= \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \left[ \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \mathbf{L}^i(k)' [\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1)] \right] \end{aligned}} \quad (6.99)$$

avec

$$\boxed{\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^s \mathbf{L}^i(k)' [\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1}] \mathbf{L}^i(k)} \quad (6.100)$$

Pour le cas particulier où  $j_1 = \dots = j_s = 0$ , on a

$$\mathbf{P}_{0, \dots, 0}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) \quad (6.101)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{0, \dots, 0}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (6.102)$$

### Expression des probabilités $\beta_{j_1, \dots, j_s}(k)$

Il nous reste à évaluer les probabilités a posteriori  $\beta_{j_1, \dots, j_s}(k)$  à partir des probabilités  $\beta_{j_1}(k), \dots, \beta_{j_s}(k)$  fournies par les filtres PDAF locaux. Pour calculer ces  $\beta_{j_1, \dots, j_s}(k)$ , on suppose **indépendantes les mesures entre les senseurs**. Cette hypothèse permet de considérer indépendantes les probabilités a priori des événements d'associations  $\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k)$ . Sous cette hypothèse, on peut calculer  $\beta_{j_1, \dots, j_s}(k)$  en utilisant la règle de décomposition bayésienne et il vient :

$$\boxed{\beta_{j_1, \dots, j_s}(k) = \frac{1}{c_s} \gamma(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k)) \prod_{i=1}^s \beta_{j_i}^i(k)} \quad (6.103)$$

$c_s$  étant une constante de normalisation telle que

$$\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} \beta_{j_1, \dots, j_s}(k) = 1 \quad (6.104)$$

Le facteur de corrélation  $\gamma(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k))$  s'écrit

$$\gamma(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k)) \triangleq \int p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}^{1,k-1}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k-1}) \frac{\prod_{i=1}^s [p(\mathbf{x}^i(k) | \theta_{j_i}^i(k), \mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{Z}^{\bar{i},k-1})]}{\prod_{i=1}^s p(\mathbf{x}^i(k) | \mathbf{Z}^{i,k-1})} d\mathbf{x}(k) \quad (6.105)$$

En supposant les **distributions gaussiennes**, il vient alors

$$\gamma(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k)) = \frac{|2\pi \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)|^{1/2} \prod_{i=1}^s |2\pi \mathbf{P}^i(k|k-1)|^{1/2}}{|2\pi \mathbf{P}(k|k-1)|^{1/2} \prod_{i=1}^s |2\pi \mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2} d_{j_1, \dots, j_s}^2) \quad (6.106)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{j_1, \dots, j_s}^2 &\triangleq \left[ \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k)' \mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1)' \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) \right] \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)' \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)' \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \end{aligned} \quad (6.107)$$

### Covariance de l'estimateur PDAF distribué

La matrice de covariance  $\mathbf{P}(k|k)$  associée à l'estimée globale distribuée est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= \beta_{0, \dots, 0}(k) \mathbf{P}(k|k-1) + \underbrace{\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} \beta_{j_1, \dots, j_s}(k) \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)}_{j_1 + \dots + j_s \neq 0} \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} [\beta_{j_1, \dots, j_s}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)' - \hat{\mathbf{x}}(k|k) \hat{\mathbf{x}}(k|k)'] \end{aligned} \quad (6.108)$$

### Extension à la prise en compte d'informations de reconnaissance

Jusqu'à présent les mesures délivrées par les différents senseurs étaient implicitement supposées de type cinématique (position, vitesse ...). Nous pouvons également chercher à améliorer la qualité du pistage distribué en utilisant des informations de reconnaissance des échos (basées sur les mesures de SER ou SIR par exemple ou des décisions délivrées par un classifieur auxiliaire). Ceci a déjà fait l'objet d'une présentation dans la section consacrée au PDAF.

Ces informations de reconnaissance qualifient la nature même des échos reçus qui sont supposées provenir soit d'une fausse alarme (FA), soit d'un objet interférant (O) ou d'une cible (T). A chaque instant  $k$ , chaque senseur  $i$  dispose donc en plus des  $m_k^i$  mesures cinématiques  $\mathbf{Z}^i(k) = \{\mathbf{z}_{j_i}^i(k)\}_{j_i=1}^{m_k^i}$  d'un ensemble

de mesures de reconnaissance  $\mathbf{D}^i(k) = \{d_{j_i}^i(k)\}_{j_i=1}^{m_k^i}$  sur la nature des échos validés. La reconnaissance décrétée  $d_{j_i}^i(k)$  concernant le  $j_i$ ème écho validé peut prendre trois valeurs possibles  $d_{j_i}^i(k)=d_0$  si l'écho est déclaré du type bruit thermique ou fausse alarme (hypothèse  $h_0$ ),  $d_{j_i}^i(k)=d_1$  si l'écho est déclaré de type objet interférant (hypothèse  $h_1$ ) ou  $d_{j_i}^i(k)=d_2$  si l'écho est déclaré de type cible (hypothèse  $h_2$ ).

La qualité du processus de reconnaissance mis localement en œuvre est caractérisée par une **matrice de confusion locale**  $\mathbf{C}^i = [c_{jh}^i]$  supposée connue dont les éléments sont donnés par  $c_{jh}^i = P(d^i(k)=d_{j_i}^i | h_j)$   $j=0, 1, 2$ . En utilisant la même démarche de développement que celle précédemment exposée, l'estimée locale s'écrit

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k) = E[\mathbf{x}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}] = \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \beta_{j_i}^i(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) \quad (6.109)$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}, \theta_{j_i}^i(k)]$  pour  $j_i \neq 0$  et  $j_i = 0$  donnés par (6.83) et (6.84) et les probabilités a posteriori d'associations  $\beta_{j_i}^i(k) \triangleq P(\theta_{j_i}^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k})$  données par (6.85) et (6.87) avec

$$e_{j_i}^i = \Lambda_{j_i}^i(k) \exp\{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^i(k)' \mathbf{S}^i(k)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^i(k)\} \quad (6.110)$$

$$b^i = (2\pi/\gamma)^{n_{z^i}/2} \lambda_{fa}^i + \lambda_o^i V^i(k) \frac{(1 - P_d^i P_g^i)}{P_d^i} \quad (6.111)$$

où

$$\Lambda_{j_i}^i(k) = \frac{[\lambda_o^i + \lambda_{fa}^i] P(d_{j_i}^i|h_2^i)}{\lambda_{fa}^i P(d_{j_i}^i|h_0^i) + \lambda_o^i P(d_{j_i}^i|h_1^i)} \quad (6.112)$$

Les densités spatiales  $\lambda_o^i$  des objets interférants étant inconnues seront remplacées par leur estimée au sens du maximum de vraisemblance à savoir

$$\hat{\lambda}_o^i = \sup\{0, \frac{m_k^i V^i(k)(1 - 2P_d^i P_g^i) + \sqrt{\Delta^i}}{2V^i(k)^2(1 - P_d^i P_g^i)} - \lambda_{fa}^i\} \quad (6.113)$$

avec

$$\Delta^i \triangleq m_k^i V^i(k)^2 (1 - 2P_d^i P_g^i)^2 + 4m_k^i(m_k^i - 1)P_d^i P_g^i(1 - P_d^i P_g^i)V^i(k)^2 \quad (6.114)$$

$P_d^i$  représente la probabilité de détection de la cible ;  $P_g^i$  la probabilité de validation de la mesure correcte ;  $\lambda_{fa}^i$  et  $\lambda_o^i$  les densités spatiales des fausses alarmes et des objets interférant au niveau du senseur  $i$ .

La covariance  $\mathbf{P}^i(k|k) \triangleq E[(\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k))(\mathbf{x}^i(k) - \hat{\mathbf{x}}^i(k|k))'|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}]$  de l'erreur d'estimation du PDAF est donnée au niveau de chaque nœud par (6.94) et (6.95).

Connaissant l'ensemble des estimées optimales locales  $\hat{\mathbf{x}}^i(k|k)$ ,  $\mathbf{P}^i(k|k)$  on cherche à construire l'estimée optimale globale  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ ,  $\mathbf{P}(k|k)$  donnée par

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \mathbf{D}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \mathbf{D}^{s,k}] = \sum_{j_1=0}^{m_1^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_s^s} \beta_{j_1, \dots, j_s}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \quad (6.115)$$

avec

$$\beta_{j_1, \dots, j_s}(k) \triangleq P(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \mathbf{D}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \mathbf{D}^{s,k}) \quad (6.116)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \mathbf{D}^{1,k}, \theta_{j_1}^1(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \mathbf{D}^{s,k}, \theta_{j_s}^s(k)] \quad (6.117)$$

En supposant les erreurs de mesure indépendantes entre les différents senseurs et les densités gaussiennes, l'estimée globale  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$  peut alors être reconstruite à partir des équations générales de la fusion distribuée (6.77) et (6.78). On obtient alors les mêmes équations d'estimation (6.99) à (6.107). La matrice de covariance  $\mathbf{P}(k|k)$  associée à l'estimée globale est alors donnée par (6.108).

### 6.2.8 Filtre PDAF distribué avec modélisation MLI

Si l'on suppose maintenant **les modèles locaux d'évolution et d'observation de la cible identiques au modèle du processeur central**, on adopte alors la modélisation MLI décrite en 6.1 par (6.1) et (6.3). On a pour  $i = 1, \dots, s$

$$\mathbf{x}^i(k) \equiv \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{v}^i(k) \equiv \mathbf{v}(k), \quad \mathbf{w}^i(k) \equiv \mathbf{w}(k) \quad (6.118)$$

$$\mathbf{F}^i(k) \equiv \mathbf{F}(k), \quad \mathbf{Q}^i(k) \equiv \mathbf{Q}(k), \quad \mathbf{R}^i(k) \equiv \mathbf{R}(k) \quad (6.119)$$

$$\mathbf{H}^i(k) \equiv \mathbf{H}_L^i(k), \quad \mathbf{L}^i(k) \equiv \mathbf{I}_{n_x} \quad (6.120)$$

**Les équations du PDAF distribué avec modélisation MLI sont identiques aux équations de fusion précédentes** (6.96) et (6.107). Seule l'expression des quantités  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$  est modifiée en

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) &= \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \left[ \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s [\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1)] \right] \end{aligned}} \quad (6.121)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^s [\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^i(k|k-1)^{-1}]} \quad (6.122)$$

#### Cas d'un bouclage à chaque période

Si les prédictions globales  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  et  $\mathbf{P}(k|k-1)$  sont **retransmises à chaque période** à chaque noeud du système, on a pour  $i = 1, \dots, s$

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k|k-1) \equiv \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (6.123)$$

$$\mathbf{P}^i(k|k-1) \equiv \mathbf{P}(k|k-1) \quad (6.124)$$

Par conséquent les quantités  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)$  se réduisent à

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) = \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \left[ \left[ \sum_{i=1}^s [\mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)]^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) \right] - (s-1) \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \right]} \quad (6.125)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} \right] - (s-1) \mathbf{P}(k|k-1)^{-1}} \quad (6.126)$$

Le facteur de corrélation  $\gamma(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k))$  intervenant dans les probabilités a posteriori d'association  $\beta_{j_1, \dots, j_s}(k)$  se réduit à

$$\gamma(\theta_{j_1}^1(k), \dots, \theta_{j_s}^s(k)) = \frac{|2\pi \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)|^{1/2} |2\pi \mathbf{P}(k|k-1)|^{(s-1)/2}}{\prod_{i=1}^s |2\pi \mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2} d_{j_1, \dots, j_s}^2) \quad (6.127)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{j_1, \dots, j_s}^2 &\triangleq \left[ \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k)' \mathbf{P}_{j_i}^i(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^i(k|k) \right] \\ &\quad - (s-1) \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)' \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)' \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}(k|k) \end{aligned} \quad (6.128)$$

### Cas particulier : MLI/PDAF distribué à 2 senseurs

Il est facile de voir que pour un système distribué comportant uniquement 2 senseurs, les équations optimales (6.96) et (6.108) du PDAF distribué se réduisent à :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \beta_{j_1, j_2}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, j_2}(k|k)} \quad (6.129)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= \beta_{0,0}(k) \mathbf{P}(k|k-1) + \underbrace{\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \beta_{j_1, j_2}(k) \mathbf{P}_{j_1, j_2}(k|k)}_{j_1+j_2 \neq 0} \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} [\beta_{j_1, j_2}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, j_2}(k|k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, j_2}(k|k)' - \hat{\mathbf{x}}(k|k) \hat{\mathbf{x}}(k|k)'] \end{aligned} \quad (6.130)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, j_2}(k|k) &= \mathbf{P}_{j_1, j_2}(k|k) \left[ \mathbf{P}_{j_1}^1(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_1}^1(k|k) + \mathbf{P}_{j_2}^2(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_2}^2(k|k) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \right] \end{aligned} \quad (6.131)$$

$$\mathbf{P}_{j_1,j_2}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}_{j_1}^1(k|k)^{-1} + \mathbf{P}_{j_2}^2(k|k)^{-1} - \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \quad (6.132)$$

$$\beta_{j_1,j_2}(k) = \frac{1}{c_2} \gamma(\theta_{j_1}^1(k), \theta_{j_2}^2(k)) \beta_{j_1}^1(k) \beta_{j_2}^2(k) \quad (6.133)$$

$$\gamma(\theta_{j_1}^1(k), \theta_{j_2}^2(k)) = \frac{|2\pi\mathbf{P}_{j_1,j_2}(k|k)|^{1/2} |2\pi\mathbf{P}(k|k-1)|^{1/2}}{|2\pi\mathbf{P}_{j_1}^1(k|k)|^{1/2} |2\pi\mathbf{P}_{j_2}^2(k|k)|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}d_{j_1,j_2}^2) \quad (6.134)$$

$$\begin{aligned} d_{j_1,j_2}^2 &\triangleq \hat{\mathbf{x}}_{j_1}^1(k|k)' \mathbf{P}_{j_1}^1(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_1}^1(k|k) + \hat{\mathbf{x}}_{j_2}^2(k|k)' \mathbf{P}_{j_2}^2(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_2}^2(k|k) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)' \mathbf{P}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}_{j_1,j_2}(k|k)' \mathbf{P}_{j_1,j_2}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_1,j_2}(k|k) \end{aligned} \quad (6.135)$$

$c_2$  étant une constante de normalisation telle que

$$\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \beta_{j_1,j_2}(k) = 1 \quad (6.136)$$

### Remarque

L'extension du filtrage MLI/PDAF distribué à la prise en compte des informations de reconnaissance est directe compte tenu de la formulation du MLR/PDAF distribué enrichi décrite précédemment.

#### 6.2.9 Filtre JPDAF distribué avec modélisation MLR

On se place maintenant dans le cas plus général du pistage multi-cibles en environnement riche en fausses alertes par un système distribué constitué de  $s$  senseurs. On suppose qu'il existe  $T$  cibles à pister par le DSN. Chaque cible est indiquée par  $t_n$ ,  $n = 1, \dots, T$ .

La modélisation globale et locale des cibles à pister  $t_n$ , ( $n = 1, \dots, T$ ) est identique à la modélisation MLR décrite en 6.1 à savoir :

Au niveau du processeur de fusion

$$\mathbf{x}^{t_n}(k+1) = \mathbf{F}^{t_n}(k)\mathbf{x}^{t_n}(k) + \mathbf{v}^{t_n}(k) \quad (6.137)$$

$$\mathbf{z}^{i,t_n}(k) = \mathbf{H}^{i,t_n}(k)\mathbf{x}^{t_n}(k) + \mathbf{w}^i(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.138)$$

Au niveau de chaque noeud  $i$  du système distribué, la dynamique et l'observation d'une cible  $t_n$  sont modélisées par un *modèle local réduit* du type

$$\mathbf{x}^{i,t_n}(k+1) = \mathbf{F}^{i,t_n}(k)\mathbf{x}^{i,t_n}(k) + \mathbf{v}^{i,t_n}(k) \quad (6.139)$$

$$\mathbf{z}^{i,t_n}(k) = \mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)\mathbf{x}^{i,t_n}(k) + \mathbf{w}^i(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.140)$$

### Calcul des estimées locales par JPDAF local

Si à l'instant  $k$ , chaque senseur  $i$  délivre  $m_k^i$  mesures notées  $\mathbf{Z}^i(k) = \{\mathbf{z}_{j_i}^i(k)\}_{j_i=1}^{m_k^i}$  pouvant potentiellement être associées aux cibles, alors au niveau du traitement local, l'estimée optimale "0-scan back" d'une cible  $t_n$  est donnée par le filtre JPDAF [FBSS80]. Cette estimée locale s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k) &= E[\mathbf{x}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}] = E[\mathbf{L}^{i,t_n}(k)\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}] \\ &= \sum_{j_i=0}^{m_k^i} P(\chi_{j_i}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k})E[\mathbf{x}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \chi_{j_i}^{i,t_n}(k)] \\ &= \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \beta_{j_i}^{i,t_n}(k)\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)\end{aligned}\quad (6.141)$$

où  $\chi_{j_i}^{i,t_n}(k)$  correspond à l'évènement d'association : "  $\mathbf{z}_{j_i}^i(k)$  (la  $j_i$ ème mesure du senseur  $i$ ) provient de la cible  $t_n$ " et où  $\chi_0^{i,t_n}(k)$  correspond à l'évènement : "Aucune des mesures issues du senseur  $i$  ne correspond à la cible  $t_n$ ". La probabilité de chacun de ces évènements marginaux d'associations est donnée par :

$$\boxed{\beta_{j_i}^{i,t_n}(k) \triangleq P(\chi_{j_i}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}) = \sum_{\chi^i(k)} P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k})\hat{\omega}_{j_i,t_n}^i(\chi^i(k))}\quad (6.142)$$

où  $\chi^i(k)$  est un des évènements d'associations conjointes possibles au niveau du  $i$ ème senseur à l'instant  $k$ . Cet évènement est défini comme

$$\boxed{\chi^i(k) \triangleq \bigcap_{j_i=1}^{m_k^i} \chi_{j_i}^{i,t_n}(k)}\quad (6.143)$$

$\hat{\omega}_{j_i,t_n}^i(\chi^i(k))$  est l'indicateur binaire d'association de la cible  $t_n$  avec la mesure  $\mathbf{z}_{j_i}^i(k)$ . Les estimées locales conditionnelles  $\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \chi_{j_i}^{i,t_n}(k)]$  pour  $j_i \neq 0$  et  $j_i = 0$  sont données par

$$\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1) + \mathbf{K}^{i,t_n}(k)\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^{i,t_n}(k)\quad (6.144)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^{i,t_n}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1)\quad (6.145)$$

où

$$\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^{i,t_n}(k) \triangleq \mathbf{z}_{j_i}^{i,t_n}(k) - \hat{\mathbf{z}}^{i,t_n}(k|k-1)\quad (6.146)$$

$$\hat{\mathbf{z}}^{i,t_n}(k|k-1) = \mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)\hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1)\quad (6.147)$$

$$\mathbf{S}^{i,t_n}(k) = \mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)\mathbf{P}^{i,t_n}(k|k)\mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)' + \mathbf{R}^i(k)\quad (6.148)$$

$$\mathbf{K}^{i,t_n}(k) \triangleq \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)\mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)'\mathbf{S}^{i,t_n}(k)^{-1}\quad (6.149)$$

La covariance  $\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)$  associée à  $\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)$  est donnée par le filtre de Kalman standard

$$\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k) = [\mathbf{I}_{n_{x^{i,t_n}}} - \mathbf{K}^{i,t_n}(k)\mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)']\mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)\quad (6.150)$$

Au niveau de chaque noeud  $i$ , et pour chaque cible  $t_n$ , la covariance de l'erreur d'estimation  $\mathbf{x}^{i,t_n}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k)$  du JPDAF est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{i,t_n}(k|k) &\triangleq E[[\mathbf{x}^{i,t_n}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k)][\mathbf{x}^{i,t_n}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k)]'|\mathbf{Z}^{i,k}] \\ &= \beta_0^{i,t_n}(k)\mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1) + \sum_{j_i=1}^{m_k^i} \beta_{j_i}^{i,t_n}(k)\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k) \\ &\quad + \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)' - \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k)\hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k)' \end{aligned} \quad (6.151)$$

On observera que l'on a pour  $j_i = 0$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}_0^{i,t_n}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1) \quad (6.152)$$

$$\mathbf{P}_0^{i,t_n}(k|k) = \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1) \quad (6.153)$$

### Calcul des probabilités $P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k})$ au niveau local

On rappelle que ces probabilités conjointes  $P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k})$  interviennent dans le calcul des probabilités marginales  $\beta_{j_i}^{i,t_n}(k)$ . En reprenant les équations du JPDAF standard (cf section sur le JPDAF), on peut montrer que l'on a

$$P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}) = \frac{\lambda_i^{\phi(\chi^i(k))}}{c_i} \prod_{j_i: \tau_{j_i}(\chi^i)=1} \frac{1}{|2\pi\mathbf{S}^{i,t_n}(k)|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^{i,t_n}(k)'\mathbf{S}^{i,t_n}(k)^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^{i,t_n}(k)\right\} \\ \prod_{t_n: \delta_{t_n}(\chi^i)=1} P_d^{i,t_n} \prod_{t_n: \delta_{t_n}(\chi^i)=0} (1 - P_d^{i,t_n}) \quad (6.154)$$

et  $P_d^{i,t_n}$  représente la probabilité de détection de la cible  $t_n$  et  $\lambda_i$  la densité spatiale des fausses alarmes au niveau du senseur  $i$ .  $c_i$  est une constante de normalisation assurant

$$\sum_{\chi^i} P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}) = 1 \quad (6.155)$$

$\tau_{j_i}(\chi^i)$  et  $\delta_{t_n}(\chi^i)$  sont respectivement l'indicateur d'association de la mesure  $\mathbf{z}_{j_i}^i(k)$  et l'indicateur de détection de la cible  $t_n$  dans l'évènement d'association  $\chi^i$  considéré. On note  $t_{j_i}$  la cible associée à la mesure  $\mathbf{z}_{j_i}^i$  dans l'évènement  $\chi^i$  considéré. Ces deux indicateurs sont définis comme :

$$\tau_{j_i}(\chi^i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{si } t_{j_i} > 0 \\ 0, & \text{si } t_{j_i} = 0 \end{cases} \quad (6.156)$$

$$\delta_{t_n}(\chi^i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{si } t_{j_i} = t_n \text{ pour une mesure } \mathbf{z}_{j_i}^i \\ 0, & \text{si } t_{j_i} \neq t_n \text{ pour tous les indices } j_i \end{cases} \quad (6.157)$$

En utilisant la représentation matricielle  $\hat{\Omega}(\chi^i) = [\hat{\omega}_{j_i t_n}(\chi^i)]$ , les indicateurs  $\tau_{j_i}(\chi^i)$  et  $\delta_{t_n}(\chi^i)$  peuvent alors être facilement calculés par

$$\tau_{j_i}(\chi^i) = \sum_{n=1}^T \hat{\omega}_{j_i t_n}(\chi^i) \quad (6.158)$$

$$\delta_{t_n}(\chi^i) = \sum_{j_i=1}^{m_k^i} \hat{\omega}_{j_i t_n}(\chi^i) \quad (6.159)$$

$\phi(\chi^i(k))$  représente le nombre total de fausses mesures dans l'évènement conjoint d'association  $\chi^i$  considéré.

$\phi(\chi^i(k))$  est donné par

$$\phi(\chi^i(k)) = \sum_{j_i=1}^{m_k^i} [1 - \tau_{j_i}(\chi^i(k))] \quad (6.160)$$

### Calcul de l'estimée globale distribuée de chaque cible

Connaissant, pour chaque cible  $t_n$ , l'ensemble des estimées optimales locales  $\hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k)$ ,  $\mathbf{P}^{i,t_n}(k|k)$  on cherche à reconstruire son estimée optimale globale  $\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k)$ ,  $\mathbf{P}^{t_n}(k|k)$  donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k) &= E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^k] = E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}] \\ &= \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} P(\chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}) \\ &\quad E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)] \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k) = \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} \beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$$

(6.161)

avec

$$\beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k) \triangleq P(\chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}) \quad (6.162)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) &\triangleq E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)] \\ &= \int \mathbf{x}^{t_n}(k) p(\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)) d\mathbf{x}^{t_n}(k) \end{aligned} \quad (6.163)$$

$\beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k)$  représente la probabilité a posteriori pour que les mesures  $\mathbf{z}_{j_1}^i, \dots, \mathbf{z}_{j_s}^s$  correspondent à la cible  $t_n$ .  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  représente l'estimée conditionnelle optimale globale de l'état quand  $\mathbf{z}_{j_1}^i, \dots, \mathbf{z}_{j_s}^s$  correspondent à la cible  $t_n$ .

### Calcul des probabilités $\beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k)$

Pour calculer les  $\beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k)$ , on suppose **indépendantes** les mesures entre les senseurs conditionnellement à l'état vrai des cibles et aussi indépendants les évènements d'associations  $\chi^1(k) \dots \chi^s(k)$  conditionnellement à l'état des cibles. Ces hypothèses permettent alors d'écrire en utilisant la règle de décomposition bayésienne et le théorème des probabilités totales

$$\begin{aligned}\beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k) &= \sum_{\chi^1(k)} \dots \sum_{\chi^s(k)} P(\chi^1(k), \dots, \chi^s(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k}) \hat{\omega}_{j_1, t_n}^1(\chi^1(k)) \dots \hat{\omega}_{j_s, t_n}^s(\chi^s(k)) \\ &= \sum_{\chi^1(k)} \dots \sum_{\chi^s(k)} \frac{1}{c_s} \gamma(\chi^1(k), \dots, \chi^s(k)) \\ &\quad \left[ \prod_{i=1}^s P(\chi^i(k) | \mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{Z}^{\bar{i}, k-1}) \right] \hat{\omega}_{j_1, t_n}^1(\chi^1(k)) \dots \hat{\omega}_{j_s, t_n}^s(\chi^s(k))\end{aligned}\tag{6.164}$$

$c_s$  étant une constante de normalisation.

Le facteur de corrélation  $\gamma(\chi^{1,t_n}(k), \dots, \chi^{s,t_n}(k))$  s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma(\chi^1(k), \dots, \chi^s(k)) &\triangleq \int \dots \int p(\mathbf{x}^{t_1}(k), \dots, \mathbf{x}^{t_T}(k) | \mathbf{Z}^{1,k-1}, \dots, \mathbf{Z}^{s,k-1}) \\ &\times \frac{\prod_{n=1}^T \prod_{i=1}^s [p(\mathbf{x}^{i,t_n}(k) | \chi^i(k), \mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{Z}^{\bar{i}, k-1})]}{\prod_{n=1}^T \prod_{i=1}^s p(\mathbf{x}^{i,t_n}(k) | \mathbf{Z}^{i,k-1})} d\mathbf{x}^{t_1}(k) \dots d\mathbf{x}^{t_T}(k)\end{aligned}\tag{6.165}$$

En supposant les **distributions gaussiennes** on peut montrer que l'expression analytique de  $\gamma(\chi_{j_1}^1(k), \dots, \chi_{j_s}^s(k))$  est donnée par

$$\gamma(\chi^1(k), \dots, \chi^s(k)) = \prod_{n=1}^T \left[ \frac{|2\pi \mathbf{P}_{j_{t_n}(\chi^1), \dots, j_{t_n}(\chi^s)}^{t_n}(k|k)|^{1/2} \prod_{i=1}^s |2\pi \mathbf{P}_{j_{t_n}(\chi^i)}^{i,t_n}(k|k-1)|^{1/2}}{|2\pi \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)|^{1/2} \prod_{i=1}^s |2\pi \mathbf{P}_{j_{t_n}(\chi^i)}^{i,t_n}(k|k)|^{1/2}} \right. \\ \left. \times \exp(-\frac{1}{2} d_{j_{t_n}(\chi^1), \dots, j_{t_n}(\chi^s)}^2) \right]\tag{6.166}$$

avec

$$\begin{aligned} d_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^2 &\triangleq \sum_{i=1}^s [\hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1)' \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1)] \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1)' \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k) \end{aligned} \quad (6.167)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1) + \mathbf{K}^{i,t_n}(k) \tilde{\mathbf{z}}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k), & \text{si } \hat{\omega}_{j_{t_n(\chi^i)}, t_n}^i(\chi^i(k)) = 1 \\ \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1), & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.168)$$

$$\mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k) = \begin{cases} [\mathbf{I}_{n_{x^{i,t_n}}} - \mathbf{K}^{i,t_n}(k) \mathbf{H}_L^{i,t_n}(k)] \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1), & \text{si } \hat{\omega}_{j_{t_n(\chi^i)}, t_n}^i(\chi^i(k)) = 1 \\ \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1), & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.169)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)$  sont donnés par les relations (6.171) ou (6.173) et (6.172) ou (6.174) en ayant préalablement effectué la substitution des indices  $j_i$  par  $j_{t_n(\chi^i)}$  pour  $i = 1, \dots, s$ .

**Expression de  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) &\triangleq E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)] \\ &= \int \mathbf{x}^{t_n}(k) p(\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)) d\mathbf{x}^{t_n}(k) \end{aligned} \quad (6.170)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  représente l'estimée conditionnelle optimale globale de l'état quand  $\mathbf{z}_{j_1}^i, \dots, \mathbf{z}_{j_s}^s$  correspondent à la cible  $t_n$ . En supposant les erreurs de mesure indépendantes entre les différents senseurs, les estimées (conditionnelles à l'association des mesures)  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  sont obtenues à partir des équations générales de la fusion distribuée (6.77) et (6.78) et l'on a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) &\triangleq E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^{1,k}, \chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \dots, \mathbf{Z}^{s,k}, \chi_{j_s}^{s,t_n}(k)] \\ &= \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) \left[ \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \mathbf{L}^{i,t_n}(k)' [\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k) - \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1)] \right] \end{aligned} \quad (6.171)$$

**Expression de  $\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)^{-1}$**

$$\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^s \mathbf{L}^{i,t_n}(k)' [\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)^{-1}] \mathbf{L}^{i,t_n}(k) \quad (6.172)$$

Pour le cas particulier  $j_1 = \dots = j_s = 0$ , on prend

$$\mathbf{P}_{0,\dots,0}^{t_n}(k|k) = \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1) \quad (6.173)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{0,\dots,0}^{t_n}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \quad (6.174)$$

### Matrice de covariance de l'estimée par JPDAF distribué

La matrice de covariance  $\mathbf{P}^{t_n}(k|k)$  associée à l'estimée globale (6.161) d'une cible  $t_n$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{t_n}(k|k) &= \beta_{0,\dots,0}^{t_n}(k)\mathbf{P}^{t_n}(k|k-1) + \underbrace{\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} \beta_{j_1,\dots,j_s}^{t_n}(k)\mathbf{P}_{j_1,\dots,j_s}^{t_n}(k|k)}_{j_1+\dots+j_s \neq 0} \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_s=0}^{m_k^s} [\beta_{j_1,\dots,j_s}^{t_n}(k)\hat{\mathbf{x}}_{j_1,\dots,j_s}^{t_n}(k|k)\hat{\mathbf{x}}_{j_1,\dots,j_s}^{t_n}(k|k)' - \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k)\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k)'] \end{aligned} \quad (6.175)$$

### JPDAF distribué avec modélisation MLR et reconnaissance

Si l'on dispose au niveau de chaque senseur d'informations de reconnaissance alors on peut enrichir le filtrage MLR/JPDAF distribué pour améliorer la qualité du pistage. Les informations cinématiques  $\mathbf{Z}^i(k) = \{\mathbf{z}_{j_i}^i(k)\}_{j_i=1}^{m_k^i}$  et de reconnaissance  $\mathbf{D}^i(k) = \{d_{j_i}^i(k)\}_{j_i=1}^{m_k^i}$  disponibles sont les mêmes que celles décrites dans le MLR/PDAF distribué enrichi. Le développement du filtre JPDAF enrichi étant quasi-similaire au développement du MLR/JPDAF précédent, on explicitera ici uniquement les points de calculs où apparaîtra une différence entre les deux types de filtres.

Au niveau local, l'estimée optimale “0-scan back” d'une cible  $t_n$  est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k) &= E[\mathbf{x}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}] \\ &= \sum_{j_i=0}^{m_k^i} P(\chi_{j_i}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}) E[\mathbf{x}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}, \chi_{j_i}^{i,t_n}(k)] \\ &= \sum_{j_i=0}^{m_k^i} \beta_{j_i}^{i,t_n}(k)\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k) \end{aligned} \quad (6.176)$$

où  $\chi_{j_i}^{i,t_n}(k)$  correspond à l'évènement d'association : “ $(\mathbf{z}_{j_i}^i(k), \mathbf{d}_{j_i}^i(k))$  (la  $j_i$ ème mesure du senseur  $i$ ) provient de la cible  $t_n$ ” et où  $\chi_0^{i,t_n}(k)$  correspond à l'évènement : “Aucune des mesures issues du senseur  $i$  ne correspond à la cible  $t_n$ ”. La probabilité de chacun de ces évènements marginaux d'associations est donnée par

$$\beta_{j_i}^{i,t_n}(k) \triangleq P(\chi_{j_i}^{i,t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}) = \sum_{\chi^i(k)} P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i,k}, \mathbf{D}^{i,k}) \hat{\omega}_{j_i,t_n}^i(\chi^i(k)) \quad (6.177)$$

où  $\chi^i(k)$  est un des évènements d'associations conjointes possibles au niveau du  $i$ ème senseur à l'instant  $k$  et  $\hat{\omega}_{j_i, t_n}^i(\chi^i(k))$  est l'indicateur binaire d'association de la cible  $t_n$  avec la mesure  $(\mathbf{z}_{j_i}^i(k), d_{j_i}^i(k))$ . Les estimées locales conditionnelles  $\hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i, t_n}(k|k) \triangleq E[\mathbf{x}^{i, t_n}(k)|\mathbf{Z}^{i, k}, \mathbf{D}^{i, k}, \chi_{j_i}^{i, t_n}(k)]$  et  $\mathbf{P}_{j_i}^{i, t_n}(k|k)$  sont données par les équations (6.144) à (6.150). Le calcul des probabilités qui intègre les informations de reconnaissance s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i, k}, \mathbf{D}^{i, k}) &= \frac{(\lambda_{fa}^i + \lambda_o^i)^{\phi(\chi^i(k))}}{c_i} \\ &\prod_{j_i: \tau_{j_i}(\chi^i)=1} \Lambda_{j_i}^i(k) \frac{1}{|2\pi\mathbf{S}^{i, t_n}(k)|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^{i, t_n}(k)' \mathbf{S}^{i, t_n}(k)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_{j_i}^{i, t_n}(k)\right\} \\ &\prod_{t_n: \delta_{t_n}(\chi^i)=1} P_d^{i, t_n} \prod_{t_n: \delta_{t_n}(\chi^i)=0} (1 - P_d^{i, t_n}) \end{aligned} \quad (6.178)$$

$P_d^{i, t_n}$  représente la probabilité de détection de la cible  $t_n$ ;  $\lambda_{fa}^i$  et  $\lambda_o^i$  sont les densités spatiales des fausses alarmes et des objets interférant au niveau du senseur  $i$ .  $\Lambda_{j_i}^i(k)$  représente la vraisemblance pour que l'écho  $j_i$  soit associé à une cible. Cette vraisemblance est calculée selon (6.112). En pratique les densités inconnues  $\lambda_o^i$  seront remplacées par leurs estimées  $\hat{\lambda}_o^i$  données en (6.113).  $c_i$  est une constante de normalisation assurant

$$\sum_{\chi^i} P(\chi^i(k)|\mathbf{Z}^{i, k}, \mathbf{D}^{i, k}) = 1 \quad (6.179)$$

Au niveau de chaque noeud  $i$ , et pour chaque cible  $t_n$ , la covariance de l'erreur d'estimation  $\mathbf{x}^{i, t_n}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{i, t_n}(k)$  du JPDAF local enrichi est donnée par (6.151). Connaissant, pour chaque cible  $t_n$ , l'ensemble des estimées optimales locales  $\hat{\mathbf{x}}^{i, t_n}(k|k)$ ,  $\mathbf{P}^{i, t_n}(k|k)$ , l'estimée optimale globale  $\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k) = E[\mathbf{x}^{t_n}(k)|\mathbf{Z}^k, \mathbf{D}^k]$  et sa covariance associée  $\mathbf{P}^{t_n}(k|k)$  seront données par les équations de fusion classiques du MLR/JPDAF (6.171) à (6.175).

### 6.2.10 Filtre JPDAF distribué avec modélisation MLI

Si l'on suppose les modèles locaux d'évolution et d'observation de chaque cible (6.137)-(6.138) identiques au modèle du processeur central (6.139)-(6.140), on a pour  $i = 1, \dots, s$  et  $n = 1, \dots, T$

$$\mathbf{x}^{i, t_n}(k) \equiv \mathbf{x}^{t_n}(k), \quad \mathbf{v}^{i, t_n}(k) \equiv \mathbf{v}^{t_n}(k), \quad \mathbf{w}^i(k) \equiv \mathbf{w}(k) \quad (6.180)$$

$$\mathbf{F}^{i, t_n}(k) \equiv \mathbf{F}^{t_n}(k), \quad \mathbf{Q}^{i, t_n}(k) \equiv \mathbf{Q}^{t_n}(k), \quad \mathbf{R}^i(k) \equiv \mathbf{R}(k) \quad (6.181)$$

$$\mathbf{H}^{i, t_n}(k) \equiv \mathbf{h}^{i, t_n}(k), \quad \mathbf{L}^{i, t_n}(k) \equiv \mathbf{I}_{n_{x^{t_n}}} \quad (6.182)$$

Les équations du JPDAF distribué avec modélisation MLI des cibles sont identiques aux équations de fusion précédentes [CCB86]. Seule l'expression des quantités  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  est modifiée en

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) &= \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) \left[ \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s [\mathbf{P}_{j_i}^{i, t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i, t_n}(k|k) - \mathbf{P}^{i, t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{i, t_n}(k|k-1)] \right] \end{aligned} \quad (6.183)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^s [\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)^{-1}]} \quad (6.184)$$

### Cas particulier

Si les prédictions globales  $\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1)$  et  $\mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)$  sont retransmises à chaque période à chaque nœud du système, on a pour  $i = 1, \dots, s$

$$\hat{\mathbf{x}}^{i,t_n}(k|k-1) \equiv \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \quad (6.185)$$

$$\mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1) \equiv \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1) \quad (6.186)$$

Par conséquent les quantités  $\hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)$  se réduisent à

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) &= \mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k) \left[ \left[ \sum_{i=1}^s [\mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (s-1) \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \right] \right] \end{aligned} \quad (6.187)$$

$$\mathbf{P}_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k|k)^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_{j_i}^{i,t_n}(k|k)^{-1} \right] - (s-1) \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \quad (6.188)$$

Le facteur de corrélation  $\gamma(\chi^1(k), \dots, \chi^s(k))$  intervenant dans les probabilités a posteriori d'associations  $\beta_{j_1, \dots, j_s}^{t_n}(k)$  se réduit à

$$\begin{aligned} \gamma(\chi^1(k), \dots, \chi^s(k)) &= \prod_{n=1}^T \left[ \frac{|2\pi \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)|^{1/2} |2\pi \mathbf{P}^{i,t_n}(k|k-1)|^{(s-1)/2}}{\prod_{i=1}^s |2\pi \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k)|^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-\frac{1}{2} d_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^2) \right] \end{aligned} \quad (6.189)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^2 &\triangleq \sum_{i=1}^s [\hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^i)}}^{i,t_n}(k|k)] \\ &\quad - (s-1) \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1)' \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, \dots, j_{t_n(\chi^s)}}^{t_n}(k|k) \end{aligned} \quad (6.190)$$

### Cas particulier du JPDAF distribué à 2 senseurs

Il est facile de voir que pour un système distribué comportant uniquement 2 senseurs, les équations optimales (6.161) et (6.175) du JPDAF distribué avec modèles locaux non réduits sont :

$$\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k) = \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \beta_{j_1, j_2}^{t_n}(k) \hat{\mathbf{x}}_{j_1, j_2}^{t_n}(k|k) \quad (6.191)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{t_n}(k|k) &= \beta_{0,0}^{t_n}(k)\mathbf{P}^{t_n}(k|k-1) + \underbrace{\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2}}_{j_1+j_2 \neq 0} \beta_{j_1,j_2}^{t_n}(k)\mathbf{P}_{j_1,j_2}^{t_n}(k|k) \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} [\beta_{j_1,j_2}^{t_n}(k)\hat{\mathbf{x}}_{j_1,j_2}^{t_n}(k|k)\hat{\mathbf{x}}_{j_1,j_2}^{t_n}(k|k)' - \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k)\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k)'] \end{aligned} \quad (6.192)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{j_1,j_2}^{t_n}(k|k) &= \mathbf{P}_{j_1,j_2}^{t_n}(k|k)[\mathbf{P}_{j_1}^{1,t_n}(k|k)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{j_1}^{1,t_n}(k|k) + \mathbf{P}_{j_2}^{2,t_n}(k|k)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{j_2}^{2,t_n}(k|k) \\ &\quad - \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1)]] \end{aligned} \quad (6.193)$$

$$\mathbf{P}_{j_1,j_2}^{t_n}(k|k)^{-1} = \mathbf{P}_{j_1}^{1,t_n}(k|k)^{-1} + \mathbf{P}_{j_2}^{2,t_n}(k|k)^{-1} - \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \quad (6.194)$$

$$\begin{aligned} \beta_{j_1,j_2}^{t_n}(k) &\triangleq P(\chi_{j_1}^{1,t_n}(k), \chi_{j_2}^{2,t_n}(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \mathbf{Z}^{2,k}) \\ &= \sum_{\chi^1} \sum_{\chi^2} \left[ \frac{1}{c_2} \gamma(\chi^1(k), \chi^2(k)) P(\chi^1(k) | \mathbf{Z}^{1,k}, \mathbf{Z}^{\bar{1},k-1}) P(\chi^2(k) | \mathbf{Z}^{2,k}, \mathbf{Z}^{\bar{2},k-1}) \right. \\ &\quad \left. \hat{\omega}_{j_1,t_n}^1(\chi^1(k)) \hat{\omega}_{j_2,t_n}^2(\chi^2(k)) \right] \end{aligned} \quad (6.195)$$

$c_2$  étant une constante de normalisation et  $\gamma(\chi^1(k), \chi^2(k))$  et  $d_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^2$  sont donnés par

$$\gamma(\chi^1(k), \chi^2(k)) = \prod_{n=1}^T \frac{|2\pi\mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^{t_n}(k|k)|^{1/2} |2\pi\mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)|^{1/2}}{|2\pi\mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}}^{1,t_n}(k|k)|^{1/2} |2\pi\mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^2)}}^{2,t_n}(k|k)|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}d_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^2) \quad (6.196)$$

et

$$\begin{aligned} d_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^2 &\triangleq \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}}^1(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}}^1(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}}^1(k|k) + \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^2)}}^2(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^2)}}^2(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^2)}}^2(k|k) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1)' \mathbf{P}^{t_n}(k|k-1)^{-1} \hat{\mathbf{x}}^{t_n}(k|k-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^{t_n}(k|k)' \mathbf{P}_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^{t_n}(k|k)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j_{t_n(\chi^1)}, j_{t_n(\chi^2)}}^{t_n}(k|k) \end{aligned} \quad (6.197)$$

## 6.3 Pistage multi-senseurs par fusion de pistes

### 6.3.1 Présentation de la fusion de pistes

Nous présentons dans cette partie, la **technique sous-optimale** de pistage multi-senseurs souvent utilisée dans les systèmes de pistage actuels. Cette méthode est communément désignée par méthode de

pistage par **fusion de piste**. Son principe consiste, dans une première étape, à évaluer par un filtre de poursuite local associé à chaque senseur, un ensemble de pistes locales ; puis, dans une seconde étape, à fusionner judicieusement les estimées locales qui correspondent à une même cible afin d'obtenir une piste globale de meilleure qualité.

On voit que cette méthode engendre d'emblée certaines limitations. La première limitation concerne la possibilité ou non de construire un filtre de poursuite associé au senseur. En effet, on sait par exemple que la poursuite par un senseur IR ne permet de restituer qu'une partie de l'état d'une cible, de plus, l'observabilité de la cible dépend étroitement de la géométrie du problème. Autrement dit, la nature des senseurs est un facteur important pour la mise en œuvre des algorithmes de pistage locaux. La seconde limitation est la nécessité d'avoir au niveau de chaque filtre local la restitution complète de l'état du système indispensable aux équations de fusion. Là encore, cette reconstitution pourra ou ne pourra pas être possible selon la nature des senseurs utilisés.

En pratique, les systèmes sont souvent de nature hybride pour pouvoir s'accommoder de ces deux limitations majeures. L'idée de l'hybridation consiste à utiliser des senseurs de manière groupée (2 ou 3 senseurs IR par exemple) et à effectuer le pistage au niveau d'un groupe par les techniques de pistage distribuées précédentes. La fusion des estimées locales (complète) issues de chaque groupe est ensuite fusionnée par la méthode de fusion de piste que l'on va maintenant rappeler. Pour une analyse plus approfondie de cette approche, on pourra se reporter à la référence [SC98].

Les 2 problèmes doivent impérativement être résolus pour mettre en œuvre la méthode de pistage par fusion de pistes

1. On doit d'abord savoir reconnaître (identifier) les pistes locales relatives à une même cible.
2. On doit ensuite savoir fusionner les estimées locales relatives à une même cible afin de construire une estimée globale (sous-optimale) de la cible.

Cette technique, comme on le verra, n'est que **sous-optimale car l'estimée fusionnée obtenue ne coïncide pas avec l'estimée globale** que l'on obtiendrait à partir de l'exploitation de toutes les mesures relatives à une même cible et issues des différents senseurs. Malgré tout, cette méthode présente le gros avantage (si la nature des senseurs le permet) d'être facilement implantable et intégrée aux systèmes opérationnels de poursuite déjà développés. Nous détaillons maintenant les réponses aux deux questions fondamentales précédentes.

### 6.3.2 Test de concordance entre pistes locales

Avant toute étape de fusion, il est nécessaire de s'assurer que les pistes locales sont effectivement “fusionnables”. En d'autres termes, on doit d'abord chercher à déterminer si deux pistes locales caractérisées par leurs statistiques  $\hat{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.)$ ,  $\mathbf{P}^{i,n_i}(k|.)$  et  $\hat{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.)$ ,  $\mathbf{P}^{j,n_j}(k|.)$  représentent, ou non, une même cible  $t$ .  $n_i$  et  $n_j$  désignent ici le numéro arbitrairement associé à la piste au niveau de chaque senseur. Ces estimées pourront être aussi bien des estimées a priori (on posera alors  $(k|.) = (k|k-1)$ ) que des estimées a posteriori (on posera alors  $(k|.) = (k|k)$ ).

Soit

$$\hat{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) = \hat{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) - \hat{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.) \quad (6.198)$$

l'estimée de la différence

$$\Delta_{n_i n_j}^{ij}(k) = \mathbf{x}^{i,n_i}(k) - \mathbf{x}^{j,n_j}(k) \quad (6.199)$$

où  $\mathbf{x}^{i,n_i}(k)$  et  $\mathbf{x}^{j,n_j}(k)$  désignent les états complets vrais des cibles associées à chacune des pistes locales  $n_i$  et  $n_j$ .

Le **test instantané de concordance** (encore appelé **test d'association** ou parfois test de corrélation) entre deux pistes locales  $n_i$  et  $n_j$  consiste alors à tester l'hypothèse

$$\mathcal{H}_0 : \Delta_{n_i n_j}^{ij}(k) = 0 \iff \text{concordance des pistes } \mathbf{x}^{i,n_i}(k) = \mathbf{x}^{j,n_j}(k) = \mathbf{x}^t(k)$$

contre

$$\mathcal{H}_1 : \Delta_{n_i n_j}^{ij}(k) \neq 0 \iff \text{discordance des pistes } \mathbf{x}^{i,n_i}(k) \neq \mathbf{x}^{j,n_j}(k)$$

Sous l'**hypothèse de concordance des pistes**  $n_i$  et  $n_j$ , l'erreur  $\tilde{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k)$  définie par

$$\tilde{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) \triangleq \Delta_{n_i n_j}^{ij}(k) - \hat{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) \quad (6.200)$$

doit être à **moyenne nulle**.

### 6.3.3 Cas simpliste des pistes locales indépendantes

Si l'on admet en première hypothèse que l'erreur

$$\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) = \mathbf{x}^{i,n_i}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) \quad (6.201)$$

est statistiquement indépendante de l'erreur

$$\tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.) = \mathbf{x}^{j,n_j}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.) \quad (6.202)$$

alors on a [MABS85]

$$\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) \tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.)'] = 0 \quad (6.203)$$

$$\mathbf{P}_{n_j n_i}^{ji}(k|.) \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.) \tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.)'] = \mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|.)' = 0 \quad (6.204)$$

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , la covariance de la différence (6.200) est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) &= E[\tilde{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) \tilde{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.)'] \\ &= E[(\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) - \tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.))(\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) - \tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.)')] \\ &= \mathbf{P}_{n_i}^i(k|.) + \mathbf{P}_{n_j}^j(k|.) \end{aligned} \quad (6.205)$$

En supposant les erreurs d'estimations locales **distribuées selon une loi normale**, le test optimal de concordance, basé sur la **distance de Mahalanobis**  $d$ , est donné par

$$d \triangleq \hat{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.)' [\mathbf{T}_{n_i n_j}^{ij}(k|.)]^{-1} \hat{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|.) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\underset{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \delta \quad (6.206)$$

Le seuil  $\delta$  du test est tel que

$$P\{d > \delta | \mathcal{H}_0\} = \alpha \quad (6.207)$$

où  $\alpha$  est une valeur choisie a priori (généralement on prend 0.005 ou 0.001). Le choix du seuil  $\delta$  est basé sur l'hypothèse de normalité de  $\Delta_{n_i n_j}^{ij}(k)$  sous  $\mathcal{H}_0$ . Sous  $\mathcal{H}_0$ ,  $d$  doit alors suivre une distribution du  $\chi^2$  de degré  $n_x$  ( $n_x$  étant la dimension du vecteur d'état complet  $\mathbf{x}$ ), c.a.d :

$$\delta = \chi_{n_x}^2(1 - \alpha) \quad (6.208)$$

### 6.3.4 Cas réaliste des pistes locales dépendantes

Dans le cas général, les pistes locales ne peuvent être considérées indépendantes puisqu'elles partagent en fait le même processus de bruit de dynamique. Il faut donc impérativement tenir compte de cette propriété au sein du test de concordance. On notera que le fait d'avoir des bruits de mesures indépendants au niveau de chaque senseur n'assure pas forcément l'indépendance des erreurs locales d'estimation  $\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.)$  et  $\tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.)$ . Il nous faut donc évaluer les covariances croisées  $E[\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.) \tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.)']$  et  $E[\tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|.) \tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|.)']$  pour mettre en œuvre le test.

Pour simplifier la présentation, on supposera les senseurs synchronisés. Cela signifie simplement que les termes de conditionnement  $(k|.)$  sont les mêmes au niveau du senseur  $i$  et au niveau du senseur  $j$ . Le cas des senseurs non synchrones ne pose aucun problème particulier en soi (à part celui de la notation bien sûr) et peut être traité d'une façon rigoureusement analogue.

### Calcul des covariances croisées

Le principe de calcul des covariances croisées est basé sur l'équation de mise à jour de l'estimée locale au niveau de chaque senseur  $m$ ,  $m = i, j$ . Cette équation est donnée par le filtre de Kalman standard (pour simplifier, on admet ici implicitement que c'est ce type de filtre adopté pour la poursuite) à savoir :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^{m,n_m}(k|k) &= \mathbf{F}^{t_{n_m}}(k-1)\hat{\mathbf{x}}^{m,n_m}(k-1|k-1) \\ &\quad + \mathbf{K}^{m,n_m}(k)[\mathbf{z}^{m,n_m}(k) - \mathbf{H}^{m,n_m}(k)\mathbf{F}^{t_{n_m}}(k-1)\hat{\mathbf{x}}^{m,n_m}(k-1|k-1)]\end{aligned}\tag{6.209}$$

où  $\mathbf{K}^{m,n_m}(k)$  est le gain du filtre de Kalman associé au processeur local  $m$  pour la piste locale  $n_m$  ( $m = i, j$ ).  $\mathbf{z}^{m,n_m}(k)$  est la mesure locale de senseur  $m$  associée à la piste  $n_m$  représentative de la cible  $t_{n_m}$ .

Compte tenu de (6.209), l'erreur d'estimation correspondante vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}^{m,n_m}(k|k) &\triangleq \mathbf{x}^{t_{n_m}}(k) - \hat{\mathbf{x}}^{m,n_m}(k|k) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{m,n_m}(k)\mathbf{H}^{m,n_m}(k)]\mathbf{F}^{t_{n_m}}(k-1)\tilde{\mathbf{x}}^{m,n_m}(k-1|k-1) \\ &\quad + [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{m,n_m}(k)\mathbf{H}^{m,n_m}(k)]\mathbf{v}^{t_{n_m}}(k-1) - \mathbf{K}^{m,n_m}(k)\mathbf{w}^m(k)\end{aligned}\tag{6.210}$$

En considérant la même cible d'intérêt  $t$  au niveau de chaque senseur (i.e.  $t = t_{n_i} = t_{n_j}$ ) et en multipliant (6.210) pour  $m = i$  par sa transposée prise en  $m = j$ , on obtient le calcul récursif suivant de la covariance croisée  $\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k)$  :

$$\boxed{\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{i,n_i}(k)\mathbf{H}^{i,n_i}(k)]\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k-1)[\mathbf{I} - \mathbf{K}^{j,n_j}(k)\mathbf{H}^{j,n_j}(k)]'}\tag{6.211}$$

avec

$$\boxed{\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k-1) = \mathbf{F}^t(k-1)\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k-1|k-1)\mathbf{F}^t(k-1) + \mathbf{Q}^t(k-1)}\tag{6.212}$$

et pour condition initiale

$$\boxed{\mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(0|0) = 0}\tag{6.213}$$

### Test de concordance des pistes locales

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , la covariance de la différence (6.200) est alors donnée dans ce cas par

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{n_i n_j}^{ij}(k|k) &= E[\tilde{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|k)\tilde{\Delta}_{n_i n_j}^{ij}(k|k)'] \\ &= E[(\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|k) - \tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|k))(\tilde{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|k) - \tilde{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|k))'] \\ &= \mathbf{P}_{n_i}^i(k|k) + \mathbf{P}_{n_j}^j(k|k) - \mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k) - \mathbf{P}_{n_j n_i}^{ji}(k|k) = \mathbf{T}_{n_j n_i}^{ji}(k|k)\end{aligned}\tag{6.214}$$

L'effet de dépendance des erreurs d'estimation locales **induit une réduction de la covariance de la différence (6.200) des estimées**. Le test de concordance des deux pistes  $n_i$  et  $n_j$  est le même

que précédemment (6.206) excepté que la matrice  $\mathbf{T}_{n_i n_j}^{ij}$  obtenue par (6.214) est comparativement plus petite que celle obtenue en (6.205).

### 6.3.5 Principe de la fusion des pistes locales concordantes

Lorsque le test de concordance de piste décrit précédemment est **satisfait** ( $\mathcal{H}_0$  est déclarée), on peut alors réaliser la fusion des estimées locales (i.e. des pistes locales concordantes). Les équations de fusion découlent directement des propriétés des vecteurs aléatoires conjointement gaussiens qui conduisent aux relations classiques d'estimation linéaire [BSF88].

#### Equations de fusion pour des erreurs locales indépendantes

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , on peut combiner les estimées locales [BS81]  $\hat{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|k)$  et  $\hat{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|k)$  de l'état de la cible associée  $\mathbf{x}^{t_{n_i}}(k) \equiv \mathbf{x}^{t_{n_j}}(k) \triangleq \mathbf{x}^t(k)$ . L'estimée fusionnée, notée  $\hat{\mathbf{x}}^t$ , et sa matrice de covariance associée  $\mathbf{P}^t$  sont obtenues par

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}^t = \mathbf{P}^{j,n_j}[\mathbf{P}^{i,n_i} + \mathbf{P}^{j,n_j}]^{-1}\hat{\mathbf{x}}^{i,n_i} + \mathbf{P}^{i,n_i}[\mathbf{P}^{i,n_i} + \mathbf{P}^{j,n_j}]^{-1}\hat{\mathbf{x}}^{j,n_j}} \quad (6.215)$$

$$\boxed{\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{i,n_i}[\mathbf{P}^{i,n_i} + \mathbf{P}^{j,n_j}]^{-1}\mathbf{P}^{j,n_j}} \quad (6.216)$$

Les indices temporels  $k$  ont ici volontairement été omis pour alléger la notation.

#### Equations de fusion pour des erreurs locales dépendantes

Si l'on se place dans un cadre plus général et réaliste où les **erreurs d'estimation locales sont corrélées** à cause du processus de bruit de dynamique commun aux senseurs, il vient les équations suivantes :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}^t(k|k) = \hat{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|k) + \mathbf{K}^t(k)[\hat{\mathbf{x}}^{j,n_j}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}^{i,n_i}(k|k)]} \quad (6.217)$$

$$\mathbf{P}^t(k|k) = \mathbf{P}^{i,n_i}(k|k) - \mathbf{K}^t(k)[\mathbf{P}^{i,n_i}(k|k) - \mathbf{P}_{n_j n_i}^{ji}(k|k)] \quad (6.218)$$

$$= \mathbf{P}^{i,n_i}(k|k) - \mathbf{K}^t(k)[\mathbf{P}^{i,n_i}(k|k) - \mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k)]' \quad (6.219)$$

Le gain de Kalman  $\mathbf{K}^t$  de la fusion est donné par :

$$\boxed{\mathbf{K}^t(k) \triangleq [\mathbf{P}^{i,n_i}(k|k) - \mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k)][\mathbf{P}^{i,n_i}(k|k) + \mathbf{P}^{j,n_j}(k|k) - \mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij}(k|k) - \mathbf{P}_{n_j n_i}^{ji}(k|k)]^{-1}} \quad (6.220)$$

On peut facilement vérifier que les équations de fusion sont symétriques par rapport aux indices  $i$  et  $j$  et que (6.217) et (6.218) se réduisent aux équations (6.215) et (6.216) quand  $\mathbf{P}_{n_j n_i}^{ji} = \mathbf{P}_{n_i n_j}^{ij} = 0$ .

Il est important de rappeler que **ces équations de fusion ne permettent pas d'obtenir l'estimée globale et optimale de l'état de la cible** considérée, mais uniquement une estimée sous-optimale [RM88]. L'utilisation de cette technique de fusion sous-optimale est cependant justifiée dans de nombreux systèmes multi-senseurs car sa mise en œuvre est simple et peu coûteuse et par le fait que la perte de performance engendrée par rapport à l'estimateur optimal ne dépasse généralement pas les 7 % [BS90]. De plus, une méthode d'approximation du calcul des covariances croisées peut être adoptée pour réduire le coût de calcul [BS90].

## 6.4 Pistage par fusion plots/pistes

Dans certains systèmes de surveillance, on peut chercher à faire du pistage par une méthode de fusion plots-pistes entre des sensures de nature hétérogène (radar+IR par exemple). On dispose généralement de pistes élaborées à partir d'un type de senseur que l'on va chercher à mettre à jour avec les mesures délivrées par les autres senseurs. La gestion de ce type d'information utilise les méthodes classiques de pistages présentées précédemment. La seule contrainte est d'avoir un modèle d'observation reliant les mesures des senseurs à l'état des pistes déjà établies.

## 6.5 Association entre mesures issues de senseurs multiples

### 6.5.1 Présentation

Dans les problèmes de pistage de cibles multiples en environnement dégradé par des systèmes multi-senseurs (à **architecture centralisée**), la fusion des mesures est l'étape préalable indispensable et primordiale au traitement de l'information. Cette étape est essentielle puisqu'elle conditionne en grande partie la qualité des résultats des algorithmes de poursuite choisis. Le but de la fusion des mesures consiste à trouver l'ensemble des appariements (mises en correspondance) des mesures issues des différents senseurs. Autrement dit on cherche à répondre à la question : telle mesure de tel senseur (supposée provenir de telle source) correspond-t-elle à telle mesure de tel autre senseur ?

Dans le cas mono-senseur, seule l'origine de la mesure est importante et des techniques classiques d'évaluation des vraisemblances d'origine sont disponibles [BSF88]. Dans le cas multi-senseurs, l'origine des mesures joue un rôle important certes, mais aussi **la mise en correspondance** des mesures et le problème de l'assignation optimale des mesures devient très complexe dès que le nombre de senseurs est supérieur à 2 et le nombre de mesures par senseur est supérieur à 10. Dans de telles situations, les techniques de balayage exhaustif de toutes les correspondances (partitions) possibles (et le calcul de

leur vraisemblance) devient prohibitif en temps de calcul même pour les calculateurs actuels. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas de 3 senseurs (2 senseurs IR et 1 senseur MM par exemple) ayant chacun à un instant donné 20 mesures. La recherche de la partition la plus vraisemblable pour cet exemple nécessite alors le balayage exhaustif de  $2^{21 \times 21 \times 21} = 2^{9261}$  partitions d'associations de mesures ainsi que l'évaluation de leur vraisemblance associée. Le nombre 21 (et non 20) a été utilisé car on doit également tenir compte de l'origine “bruit thermique/FA” possible des mesures. On voit donc que ce nombre de partitions à générer est très important et varie **de façon exponentielle** avec la dimension du problème. Le problème général de l'assignation est bien connu pour être un problème “NP-hard” ; c'est à dire non résolvable par un algorithme dont la complexité est une fonction polynomiale de la dimension du problème.

Cette section présente le principe d'une méthode récente de résolution **approchée** du problème général de l'assignation qui présente l'avantage d'être à **complexité polynomiale**. Il faut savoir que cette méthode qui découle des travaux de S.Deb [BS90] reste une méthode, en général, **sous-optimale** dans le sens où la solution trouvée ne correspond pas toujours à **la partition optimale du problème d'assignation**. Cependant elle présente le gros avantage, contrairement aux méthodes d'optimisations plus communément employées (telles que le recuit simulé, algorithmes génétiques, recherches par méthodes tabou, etc), **de fournir une mesure de proximité de la solution générée à la solution optimale inconnue**. On peut donc en pratique utiliser cette méthode avec un critère d'arrêt qui correspondra à la précision d'assignation choisie (typiquement inférieure à 2 pourcents pour une centaine d'itérations de l'algorithme). Elle reste d'un intérêt certain pour les systèmes multi-senseurs actuels et futurs.

### 6.5.2 Associations entre des mesures délivrées par 3 senseurs

#### Hypothèses et modélisation adoptées

On considère une région de l'espace dans laquelle sont supposées évoluer  $T$  cibles ( $T$  est **inconnu**). Chaque cible  $t_n$  ( $n = 1, \dots, T$ ) est repérée par ses coordonnées  $(x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$ . On suppose disposer de 3 senseurs délocalisés  $s = 1, 2, 3$  positionnés en  $(x_s, y_s, z_s)$ . Chaque senseur observe l'espace et fournit un ensemble de mesures  $\{\mathbf{z}_{j_s}^s(k)\}_{j_s=1}^{m_s^s}$ .

Pour simplifier la notation, on complète cet ensemble par une “**mesure**” **purement fictive**  $\mathbf{z}_0^s(k)$  qui permet d'envisager toutes les associations possibles mesures↔origines incluant le cas d'une détection de cible par seulement 1 ou 2 des senseurs. L'ensemble des mesures délivrées par un senseur  $s$  est noté

$$\boxed{\mathbf{Z}^s(k) = \mathbf{z}_0^s(k) \cup \{\mathbf{z}_{j_s}^s(k)\}_{j_s=1}^{m_s^s} = \{\mathbf{z}_{j_s}^s(k)\}_{j_s=0}^{m_s^s}} \quad (6.221)$$

L'ensemble de **toutes** les mesures disponibles délivrées par les 3 senseurs à l'instant  $k$  est noté

$$\mathbf{Z}(k) = \{\mathbf{Z}^s(k)\}_{s=1}^3 \quad (6.222)$$

Le nombre de mesures délivrées  $m_k^s$  pour  $s = 1, 2, 3$  varie d'un senseur à l'autre et, en général,  $m_k^1 \neq m_k^2 \neq m_k^3$ . On suppose que **chaque cible peut engendrer au plus une seule mesure au niveau de chaque senseur** et l'on autorise ici la possibilité de fausses alarmes.

Les mesures  $j_s = 1 \dots m_k^s$  délivrées par chaque senseur  $s$  sont modélisées par :

$$\mathbf{z}_{j_s}^s(k) = \begin{cases} \mathbf{h}^{t_n}[\mathbf{x}^{t_n}, k] + \mathbf{v}_{j_s}^s(k) & \text{si la mesure provient de la cible } t_n \\ \mathbf{w}_{j_s}^s(k) & \text{si c'est une fausse alarme} \end{cases} \quad (6.223)$$

Les bruits de mesures  $\mathbf{v}_{j_s}^s(k)$  sont supposés **indépendants** d'un senseur à l'autre, gaussiens, centrés de covariance respective  $\mathbf{R}^s(k)$ . La densité de probabilité des fausses alarmes  $\mathbf{w}_{j_s}^s(k)$  est supposée uniforme dans le volume d'observation  $V^s$  de chaque senseur  $s$  et est donc donnée par

$$p_{\mathbf{w}_{j_s}^s(k)}(\mathbf{w}(k)) = \frac{1}{V^s} \quad (6.224)$$

## Partition des mesures

Considérons un **triplet** quelconque de mesures  $(\mathbf{z}_{j_1}^1(k), \mathbf{z}_{j_2}^2(k), \mathbf{z}_{j_3}^3(k))$  et notons le

$$\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k) \triangleq (\mathbf{z}_{j_1}^1(k), \mathbf{z}_{j_2}^2(k), \mathbf{z}_{j_3}^3(k)) = \{\mathbf{z}_{j_s}^s\}_{s=1}^3 \quad (6.225)$$

L'introduction des mesures fictives permet de pouvoir considérer toutes les associations possibles y compris celles où une cible est détectée par seulement 1 ou 2 senseurs.

A chaque triplet envisagé, on peut calculer une **vraisemblance**. Supposons par exemple, qu'une cible  $t_n$  soit présente en  $(x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$ , que le senseur 1 ne détecte pas la cible et que les senseurs 2 et 3 aient détectés la cible, alors la vraisemblance du triplet  $\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)$  est donnée par

$$\Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) = (1 - P_d^1(t_n))P_d^2(t_n)p(\mathbf{z}_{j_2}^2(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})P_d^3(t_n)p(\mathbf{z}_{j_3}^3(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \quad (6.226)$$

D'une façon générale, la vraisemblance d'un triplet conditionnellement à l'état présumé d'une cible  $t_n$  est donné par

$$\Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) = \prod_{s=1}^3 \left[ P_d^s(t_n)p(\mathbf{z}_{j_s}^s(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \right]^{1-\delta_{0j_s}} \left[ 1 - P_d^s(t_n) \right]^{\delta_{0j_s}} \quad (6.227)$$

où  $P_d^s(t_n)$  est la probabilité de détection de la cible  $t_n$  par le senseur  $s$  et où  $\delta_{0j_s}$  est la fonction delta de Kronecker définie par

$$\delta_{0j_s} = \begin{cases} 1 & \text{si } j_s = 0 \text{ représentant la non détection de la cible par le senseur } s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.228)$$

Compte tenu du modèle choisi, la densité  $p(\mathbf{z}_{j_s}^s(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$  vaut  $N(\mathbf{h}^{t_n}[\mathbf{x}^{t_n}, k], \mathbf{R}^{t_n, s}(k))$ . En pratique, cette densité, étant **inconnue**, sera remplacée soit par

- l'estimée obtenue à partir de la prédiction du filtre de poursuite associé à la cible considérée dans le cas d'un pistage dynamique. On prend alors

$$p(\mathbf{z}_{j_s}^s(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \sim N(\hat{\mathbf{z}}^{t_n, s}(k|k-1), \mathbf{S}^{t_n, s}(k)) \quad (6.229)$$

- l'estimée obtenue (dans le cas statique) en maximisant un certain rapport de vraisemblance généralisé (cf ci-après). On prendra alors

$$p(\mathbf{z}_{j_s}^s(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \sim N(\mathbf{h}^{t_n}[\hat{\mathbf{x}}^{t_n}, k], \mathbf{R}^{t_n, s}(k)) \quad (6.230)$$

## Partition faisable des mesures

L'ensemble des mesures  $\mathbf{Z}(k)$ , peut être divisé en deux sous-ensembles possibles de triplets de mesures  $\mathbf{Z}_c$  et  $\mathbf{Z}_f$  associés ou non à une cible. On désigne par  $\gamma$  une partition possible de l'espace des mesures :

$$\gamma = \{\mathbf{Z}_c, \mathbf{Z}_f\} \quad (6.231)$$

$\mathbf{Z}_c$  est l'ensemble des triplets de mesures associés aux différentes cibles. Pour chaque triplet de  $\mathbf{Z}_c$  **au moins une mesure du triplet correspond à une cible véritable**.  $\mathbf{Z}_f$  est l'ensemble des triplets de fausses mesures envisagés pour la partition  $\gamma$  choisie.

La construction d'une partition **faisable** nécessite que soient respectées les 2 **contraintes** suivantes :

1. Chaque mesure délivrée par un senseur provient d'une seule source. Ceci impose d'avoir

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{Z}_c \cup \mathbf{Z}_f \quad (6.232)$$

2. Chaque mesure ne peut être associée qu'à une cible et une seule au plus ; ce qui impose

$$\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3} \cap \mathbf{Z}_{j'_1 j'_2 j'_3} = \emptyset \quad \forall j_s \neq j'_s, \quad s = 1, 2, 3 \quad (6.233)$$

Désignons par  $\Gamma \triangleq \{\gamma\}$  l'**ensemble de toutes les partitions faisables**  $\gamma$  possibles et par  $\zeta(\gamma)$  l'évènement suivant : "la partition  $\gamma$  est correcte". Pour **normaliser la fonction de vraisemblance** de manière à ce qu'elle soit indépendante du nombre de mesures délivrées par les senseurs, on définit la partition particulière  $\gamma_0 \in \Gamma$  comme

$$\gamma_0 \triangleq \{\mathbf{Z}_c = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_f = \mathbf{Z}\} \quad (6.234)$$

## Partition la plus vraisemblable

La partition des mesures **la plus vraisemblable**  $\gamma^*$  est obtenue en recherchant la partition  $\gamma \in \Gamma$  qui maximise le rapport de vraisemblance normalisé

$$\boxed{\max_{\gamma \in \Gamma} \frac{L(\gamma)}{L(\gamma_0)}} \quad (6.235)$$

où la vraisemblance d'une partition  $\gamma$  est donnée par

$$\boxed{L(\gamma) = p[\mathbf{Z}(k)|\zeta(\gamma)] = \left[ \prod_{\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3} \in \gamma} \Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \right] \left[ \prod_{s=1}^3 \left( \frac{1}{V_s} \right)^{m_k^s - T_s(\gamma)} \right]} \quad (6.236)$$

et la vraisemblance  $L(\gamma_0)$  de  $\gamma_0$  par

$$\boxed{L(\gamma_0) = p[\mathbf{Z}(k)|\zeta(\gamma_0)] = \prod_{s=1}^3 \left[ \frac{1}{V_s} \right]^{m_k^s}} \quad (6.237)$$

$T_s(\gamma)$  est le nombre de cibles supposées détectées par le senseur  $s$  dans la partition  $\gamma$ . En pratique, les positions des cibles  $(x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$  sont évidemment **inconnues**; ceci empêche l'utilisation directe de (6.236).

Il existe cependant 2 approches possibles pour la mise en œuvre de (6.235) selon le contexte du problème.

1. **dans un contexte d'assignation dynamique** : les pistes sont déjà formées et l'on dispose déjà de l'ensemble des positions prédites des cibles (par les filtres de poursuite) à savoir  $\mathcal{T} \triangleq \{(\hat{x}_t = \hat{x}_t(k|k-1), \hat{y}_t = \hat{y}_t(k|k-1), \hat{z}_t = \hat{z}_t(k|k-1))\}$ . Ainsi dans (6.235), on remplacera directement  $L(\gamma)$  par

$$\boxed{\hat{L}(\gamma) = \left[ \prod_{\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3} \in \gamma} \hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)|\hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) \right] \left[ \prod_{s=1}^3 \left( \frac{1}{V_s} \right)^{m_k^s - T_s(\gamma)} \right]} \quad (6.238)$$

où  $\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)|\hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n})$  est donné par

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)|\hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) = \prod_{s=1}^3 \left[ P_d^s(t_n) N(\hat{\mathbf{z}}^{t_n, s}(k|k-1), \mathbf{S}^{t_n, s}(k)) \right]^{1-\delta_{0j_s}} \left[ 1 - P_d^s(t_n) \right]^{\delta_{0j_s}} \quad (6.239)$$

et où  $(\hat{x}_{t_n} = \hat{x}_{t_n}(k|k-1), \hat{y}_{t_n} = \hat{y}_{t_n}(k|k-1), \hat{z}_{t_n} = \hat{z}_{t_n}(k|k-1))$  est la position prédite d'une des cibles pistées générant la meilleure association du triplet de mesure envisagé  $\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k)$ , c'est à dire :

$$\boxed{(\hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) = \arg \max_{(\hat{x}_t, \hat{y}_t, \hat{z}_t) \in \mathcal{T}} \Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}| \hat{x}_t, \hat{y}_t, \hat{z}_t)} \quad (6.240)$$

2. **dans un contexte d'assignation statique** : on ne dispose d'aucune information a priori sur la position des cibles, il nous faudra **remplacer la position inconnue** des cibles  $(x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$  par

leur estimée au sens du maximum de vraisemblance à partir du triplet de mesures  $\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}$  à savoir

$$\boxed{(\hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) = \arg \max_{(x_t, y_t, z_t)} \Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3} | x_t, y_t, z_t)} \quad (6.241)$$

La vraisemblance  $L(\gamma)$  de la partition sera alors remplacée par son estimée  $\hat{L}(\gamma)$  donnée en (6.238) avec

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k) | \hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) = \prod_{s=1}^3 \left[ P_d^s(t_n) N(\mathbf{h}^{t_n}[\hat{\mathbf{x}}^{t_n}, k], \mathbf{R}^{t_n, s}(k)) \right]^{1-\delta_{0js}} \left[ 1 - P_d^s(t_n) \right]^{\delta_{0js}} \quad (6.242)$$

Dans le cas où les senseurs sont passifs (IR), on sait qu'**au moins 2 senseurs sont nécessaires** à la reconstruction de la position d'une cible par triangulation. Ainsi, dans le cas statique, on fera l'hypothèse que tous les triplets du type  $\mathbf{Z}_{j_1 00}$ ,  $\mathbf{Z}_{0 j_2 0}$  ou  $\mathbf{Z}_{00 j_3}$  seront uniquement associés à  $\mathbf{Z}_f$ . Cette hypothèse n'a, bien entendu, plus lieu d'être dans le cas du pistage dynamique.

## Prise en compte de la reconnaissance

Dans le cas où des informations de reconnaissance sont également disponibles au niveau de chaque écho reçu, en plus des mesures purement cinématiques, alors il conviendra de modifier la valeur des vraisemblances (6.239) ou (6.242) par

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k) | \hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) = \prod_{s=1}^3 \left[ P_d^s(t_n) \Lambda_{j_s}^s(k) N(\hat{\mathbf{z}}^{t_n, s}(k | k-1), \mathbf{S}^{t_n, s}(k)) \right]^{1-\delta_{0js}} \left[ 1 - P_d^s(t_n) \right]^{\delta_{0js}} \quad (6.243)$$

ou bien

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3}(k) | \hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n}) = \prod_{s=1}^3 \left[ P_d^s(t_n) \Lambda_{j_s}^s(k) N(\mathbf{h}^{t_n}[\hat{\mathbf{x}}^{t_n}, k], \mathbf{R}^{t_n, s}(k)) \right]^{1-\delta_{0js}} \left[ 1 - P_d^s(t_n) \right]^{\delta_{0js}} \quad (6.244)$$

où  $\Lambda_{j_s}^s(k)$  est la vraisemblance pour que la mesure  $j_s$  du senseur  $s$  corresponde à une cible compte tenu de la décision de reconnaissance prise  $d_{j_s}^s$ . Cette vraisemblance sera donnée par (6.112).

## Formulation mathématique du problème

Le problème auquel on s'intéresse maintenant est celui de la recherche de  $\gamma^*$  tel que

$$\boxed{\gamma^* = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} \frac{\hat{L}(\gamma)}{L(\gamma_0)}} \quad (6.245)$$

Comme dans la présentation de la méthode de pistage de Morefield, ce problème de maximisation est équivalent à la **minimisation de la log-vraisemblance négative**  $J(\gamma)$  du rapport, soit

$$\boxed{J^* = \min_{\gamma \in \Gamma} J(\gamma) = \min_{\gamma \in \Gamma} \left[ -\ln \frac{\hat{L}(\gamma)}{L(\gamma_0)} \right] = \min_{\gamma \in \Gamma} [\ln L(\gamma_0) - \ln \hat{L}(\gamma)]} \quad (6.246)$$

En utilisant (6.237), (6.238) et (6.239) et après quelques manipulations algébriques élémentaires, il vient finalement l'expression suivante du critère  $J(\gamma)$

$$\boxed{J(\gamma) = [\ln L(\gamma_0) - \ln \hat{L}(\gamma)] = \sum_{\mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3} \in \mathbf{Z}_c} c_{j_1 j_2 j_3}} \quad (6.247)$$

avec **dans le cas dynamique**

$$c_{j_1 j_2 j_3} \triangleq \sum_{s=1}^3 \left[ (1 - \delta_{0j_s}) [\ln(\frac{(2\pi)^{n_{z_s}/2} |\mathbf{S}^{t_n, s}|^{1/2}}{P_d^s(t_n) V^s}) + \frac{1}{2} (\mathbf{z}_{j_s}^s(k) - \hat{\mathbf{z}}^{t_n, s}(k|k-1))' \mathbf{S}^{t_n, s}(k)^{-1} (\mathbf{z}_{j_s}^s(k) - \hat{\mathbf{z}}^{t_n, s}(k|k-1))] - \delta_{0j_s} \ln(1 - P_d^s(t_n)) \right] \quad (6.248)$$

ou **dans le cas statique**

$$c_{j_1 j_2 j_3} \triangleq \sum_{s=1}^3 \left[ (1 - \delta_{0j_s}) [\ln(\frac{(2\pi)^{n_{z_s}/2} |\mathbf{R}^{t_n, s}|^{1/2}}{P_d^s(t_n) V^s}) + \frac{1}{2} (\mathbf{z}_{j_s}^s(k) - \mathbf{h}^{t_n}[\hat{\mathbf{x}}^{t_n}, k])' \mathbf{R}^{t_n, s}(k)^{-1} (\mathbf{z}_{j_s}^s(k) - \mathbf{h}^{t_n}[\hat{\mathbf{x}}^{t_n}, k])] - \delta_{0j_s} \ln(1 - P_d^s(t_n)) \right] \quad (6.249)$$

### Problème primal d'assignation 3-D

Ce problème de minimisation peut être reformulé comme un problème classique d'assignation 3-D.

Pour cela, on définit, pour  $j_s = 0, 1, \dots, m_k^s$ , les variables d'évènements binaires

$$\rho_{j_1 j_2 j_3} = \begin{cases} 1 & \text{si le triplet } \mathbf{Z}_{j_1 j_2 j_3} \in \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant ces variables binaires, la fonction de coût dans (6.247) se simplifie en

$$\boxed{J^* = \min_{\rho_{j_1 j_2 j_3} \in P} J(\rho)} \quad (6.250)$$

avec

$$J(\rho) = \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} c_{j_1 j_2 j_3} \rho_{j_1 j_2 j_3} \quad (6.251)$$

$P$  est l'ensemble des partitions acceptables (i.e faisables). On rappelle qu'une partition est dite acceptable si elle remplit les deux hypothèses de base énoncées en (6.232) et (6.233). La faisabilité d'une partition peut mathématiquement être caractérisée par l'ensemble des **contraintes égalités suivantes** :

$$\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \rho_{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad \forall j_3 = 1 \dots m_k^3 \quad (6.252)$$

$$\sum_{j_3=0}^{m_k^3} \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \rho_{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad \forall j_2 = 1 \dots m_k^2 \quad (6.253)$$

$$\sum_{j_2=0}^{m_k^2} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad \forall j_1 = 1 \dots m_k^1 \quad (6.254)$$

Les équations (6.250)-(6.254) constituent la formulation générale du problème **primal de l'assignation 3-D.**

## Méthode de recherche de la partition optimale

Les équations (6.250)-(6.254) constituent la formulation générale du problème de l'assignation 3-D. Ce problème est connu pour être un problème “**NP-hard**”, c'est à dire qu'il ne peut être résolu par un algorithme dont la complexité est une fonction polynomiale de la dimension du problème. Par conséquent, on souhaiterait disposer d'une méthode rapide ‘a complexité (temps d'exécution) polynomiale qui donne une solution aussi proche que l'on veut de la solution optimale. On aimerait également pouvoir savoir mesurer la qualité de la solution fournie par la méthode par rapport à la solution optimale inconnue.

Plusieurs méthodes ont déjà été proposées dans la littérature pour répondre (partiellement) au problème. Mais la plupart de ces méthodes (comme les méthodes de tri d'arbres binaires, de recuit simulé) fournissent généralement une solution **sous-optimale locale** sans indicateur de mesure de proximité de la solution optimale. Ceci est très préjudiciable dans les problèmes de pistage actuels où l'association des mesures est une étape primordiale qui conditionne la qualité du filtrage mis en œuvre. Jusqu'à présent, seule la méthode développée par S. Deb et K. Pattipati [DPBS92b, DPBS93] basée sur l'**algorithme de l'Auction** (vente aux enchères) de D. Bertsekas [Ber88, Ber91, Ber92, Gau97] présente tous les atouts qui viennent d'être mentionnés. Nous proposons donc de rappeler les principes de cette méthode et la validons par un certain nombre de simulations démonstratrices.

## Principe de la méthode de Deb et Pattipati

Le principe général de cette méthode consiste à résoudre le problème de l'assignation 3-D par la **Résolution successive de problèmes d'assignation 2-D**. Cette méthode est une méthode de relaxation lagrangienne primal-duale. Pour cela, on associe d'abord un ensemble de multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{u} = [u_0, u_{j_3}]$ , ( $j_3 = 1, \dots, m_k^3$ ) à la contrainte (6.252) ainsi qu'un paramètre fictif  $u_0 \equiv 0$  pour simplifier les notations. Nous obtenons alors la **fonction duale**

$$q(\mathbf{u}) \triangleq \min_{\rho_{j_1 j_2 j_3} \in P} \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3}) \rho_{j_1 j_2 j_3} + \sum_{j_3=0}^{m_k^3} u_{j_3} \quad (6.255)$$

avec les **contraintes égalités restantes**

$$\sum_{j_2=0}^{m_k^2} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad \forall j_1 = 1 \dots m_k^1 \quad (6.256)$$

$$\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad \forall j_2 = 1 \dots m_k^2 \quad (6.257)$$

On remarque alors que pour un vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{u}$  donné, le problème de minimi-

sation (6.255) est équivalent au problème d'assignation 2-D. En effet, posons

$$\boxed{\omega_{j_1 j_2} \triangleq \sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} \quad \forall j_1 = 0 \dots m_k^1 \text{ et } \forall j_2 = 0 \dots m_k^2} \quad (6.258)$$

Les contraintes (6.256) et (6.256) s'expriment alors comme

$$\sum_{j_2=0}^{m_k^2} \omega_{j_1 j_2} = 1 \quad \forall j_1 = 1 \dots m_k^1 \quad (6.259)$$

$$\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \omega_{j_1 j_2} = 1 \quad \forall j_2 = 1 \dots m_k^2 \quad (6.260)$$

D'autre part, puisqu'on a toujours

$$\sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3}) \geq \sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} \min_{j_3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3}) \quad (6.261)$$

$$\geq \min_{j_3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3}) \sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} \quad (6.262)$$

il vient, en posant

$$\boxed{d_{j_1 j_2} \triangleq \min_{j_3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3}) \quad \forall j_1 = 0 \dots m_k^1 \text{ et } \forall j_2 = 0 \dots m_k^2} \quad (6.263)$$

l'inégalité fondamentale

$$\boxed{d_{j_1 j_2} \omega_{j_1 j_2} \leq \sum_{j_3=0}^{m_k^3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3}) \rho_{j_1 j_2 j_3}} \quad (6.264)$$

et par conséquent on a  $\forall \mathbf{u}$

$$\boxed{q_m(\mathbf{u}) \leq q(\mathbf{u})} \quad (6.265)$$

avec

$$\boxed{q_m(\mathbf{u}) \triangleq \min_{\omega_{j_1 j_2}} \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} d_{j_1 j_2} \omega_{j_1 j_2} + \sum_{j_3=0}^{m_k^3} u_{j_3}} \quad (6.266)$$

Le problème de la minimisation (6.266) sous les contraintes (6.259) et (6.260) est donc **un problème classique d'assignation 2-D** dont la solution est aussi, compte tenu de (6.265), **solution du problème dual** (6.255). Les assignations binaires  $\omega_{j_1 j_2}$  **solutions** de (6.266) seront notées  $\{\omega_{j_1 j_2}^*\}$  et la valeur prise par  $q_m(\mathbf{u})$  en  $\omega_{j_1 j_2}^*$  sera notée  $q_m^*(\mathbf{u})$ . Il faut savoir qu'il existe différentes méthodes de résolution pour ce problème. Parmi ces méthodes, la méthode relativement récente de la “vente aux enchères” ou “auction” développée par le Professeur Bertsekas [Ber88] (et adaptée à notre contexte particulier) se revèle être la plus performante. Nous allons maintenant rappeler brièvement le principe de l'algorithme de l'**Auction** et de l'**Auction modifié** par Deb et Pattipati.

## Rappel du principe de l’Auction standard

L’algorithme de l’Auction standard développé par D. Bertsekas permet de résoudre le problème **symétrique d’appariement optimal entre  $n$  personnes et  $n$  objets**. Ce problème **primal** peut mathématiquement s’exprimer comme :

$$\boxed{\text{maximiser} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j \in A(i)} a_{ij} f_{ij}} \quad (6.267)$$

sous les contraintes

$$\sum_{j \in A(i)} f_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (6.268)$$

$$\sum_{i|j \in A(i)} f_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (6.269)$$

$$0 \leq f_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad j \in A(i) \quad (6.270)$$

où  $n$  est le nombre d’objets et de personnes à appairer ;  $a_{ij}$  est le gain de l’appariement de la personne  $i$  avec l’objet  $j$ . Le problème consiste à trouver l’assignation optimale  $S$  ; c’est à dire un ensemble d’appariements  $(i, j)$  possibles, tel que le gain global de l’assignation  $\sum_{(i,j) \in S} a_{ij}$  soit maximum.  $f_{ij}$  est l’indicateur binaire d’appariement cherché associé à  $(i, j)$ .  $f_{ij}$  vaut 1 si l’appariement  $(i, j)$  est valide dans  $S$  ou 0 sinon.  $A(i)$  est l’ensemble des objets  $j$  potentiellement associables à une personne  $i$ . Les trois contraintes expriment le fait que chaque personne doit être associée à un et un seul objet et réciproquement. Dans sa formulation initiale, les gains  $a_{ij}$  sont des entiers relatifs, mais il faut savoir que l’utilisation de coûts à valeurs réelles est toujours possible moyennant un facteur d’échelle adapté.

Par la théorie de la dualité [Roc70], on peut montrer que le **problème dual** associé au problème primal énoncé plus haut consiste à trouver les appariements  $(r_i, p_j)$  tels que

$$\boxed{\min_{(r_i, p_j)} \quad \sum_{i=1}^n r_i + \sum_{j=1}^n p_j} \quad (6.271)$$

sous les contraintes

$$\boxed{r_i + p_j \geq a_{ij} \quad \forall i, j \in A(i)} \quad (6.272)$$

Les **variables duales**  $r_i$  et  $p_j$  peuvent être assimilées (dans un contexte économique) respectivement aux **profits des personnes**  $i$  et aux **prix des objets**  $j$  et correspondent aux contraintes (6.268) et (6.269) du problème primal d’assignation 2-D. Cette remarque justifie la dénomination de vente aux enchères ou “auction” donné par D. Bertsekas à la méthode. On sait [Ber88] de plus que **la solution du problème dual génère** automatiquement **la solution primale optimale**. D’après (6.271), on voit que le **critère dual est minimisé** lorsque les profits  $r_i$  sont égaux à la valeur maximale de leur marge

$a_{ij} - p_j$  pour  $j \in A(i)$ . Par conséquent, le problème dual peut être énoncé sous la forme équivalente suivante

$$\min_{\mathbf{p}|p_j \geq 0} q(\mathbf{p}) \quad (6.273)$$

avec

$$q(\mathbf{p}) \triangleq \sum_{i=1}^n \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} + \sum_{j=1}^n p_j \quad (6.274)$$

Pour un vecteur de prix donné  $\mathbf{p}$ , on désigne par **marge de profit maximale réalisée par une personne  $i$**  la quantité

$$\pi_i \triangleq \sum_{i=1}^n \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} \quad (6.275)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principe de la méthode de Bertsekas qui consiste en 2 phases essentielles :

1. **une phase de mise aux enchères**
2. **une phase d'adjudication**

Au départ (pour l'initialisation de l'algorithme), les prix des objets  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sont mis à zéro et aucun appariement n'est fait ( $S = \emptyset$ ). Les étapes successives intervenant dans les 2 phases de l'algorithme de l'Auction sont les suivantes :

#### 1. Phase de mise aux enchères

Pour chaque personne  $i$  non encore assignée dans  $S$ , on doit

- Calculer la valeur courante de chaque objet  $j \in A(i)$  donnée par

$$v_{ij} = a_{ij} - p_j \quad (6.276)$$

- Chercher le meilleur objet  $j^*$  donnant la marge de profit maximale, i.e.

$$v_{ij^*} = \max_{j \in A(i)} v_{ij} \quad (6.277)$$

puis trouver la seconde meilleure marge  $w_{ij^*}$  offerte par les objets autres que  $j^*$ , i.e.

$$w_{ij^*} = \max_{j \in A(i), j \neq j^*} v_{ij} \quad (6.278)$$

- Calculer l'enchère  $b_{ij^*}$  de la personne  $i$  qui vaut

$$b_{ij^*} = a_{ij^*} - w_{ij^*} + \epsilon \quad (6.279)$$

## 2. Phase d'adjudication

Pour chaque objet  $j$  :

On désigne par  $P(j)$  l'ensemble des personnes ayant enchéri sur l'objet  $j$ . Si  $P(j)$  est non vide, alors on augmente le prix  $p_j$  de l'objet à sa meilleure enchère (adjudication de l'objet à la personne  $i^*$ ), i.e.

$$p_j := \max_{i \in P(j)} b_{ij} \quad (6.280)$$

On modifie (complète) l'assignation  $S$  de la manière suivante :

- (a) on enlève de l'assignation courante  $S$  l'appariement  $(i, j)$  pour lequel l'objet  $j$  était précédemment associé.
- (b) on rajoute à  $S$  le nouvel appariement  $(i^*, j)$  issu de l'adjudication de l'objet  $j$ .

Cet algorithme **fonctionne efficacement** et **garantit la solution optimale** tant que le paramètre  $\epsilon$  **reste inférieur** à  $1/n$ . De nombreuses simulations effectuées ont permis de valider cette méthode dont l'efficacité est redoutable pour les problèmes de très grandes dimensions.

## Rappel du principe de l'Auction modifié

Le problème de l'assignation 2-D qu'on doit résoudre dans le cas multi-senseurs, ne correspond pas exactement à la formulation du problème d'assignation 2-D standard décrit précédemment. Car, compte tenu de l'introduction des mesures fictives pouvant être associées à l'hypothèse de bruit thermique, les contraintes du problème se voient modifiées. De plus, **la cardinalité de la liste des personnes** (i.e. du nombre de mesures du senseur 1) est, en général, **différente de la cardinalité de la liste des objets** (i.e. du nombre de mesures du senseur 2). Des modifications de la méthode de Bertsekas peuvent cependant être appliquées pour résoudre ce nouveau problème. On aboutit alors à l'algorithme de l'**“auction” modifié** proposé par Somnath Deb dans sa thèse. Le problème **primal modifié** consiste donc à résoudre

$$\text{maximiser} \quad \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} f_{ij}$$

(6.281)

sous les contraintes

$$\sum_{i=0}^{n_1} f_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n_2 \quad (6.282)$$

$$\sum_{j=0}^{n_2} f_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n_1 \quad (6.283)$$

$$f_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 0, \dots, n_1 \quad \forall j = 0, \dots, n_2 \quad (6.284)$$

Le problème **dual** associé à ce problème **primal modifié** est alors (on suppose avoir  $a_{00} \equiv 0$ )

$$\boxed{\min_{(r_i, p_j)} \sum_{i=1}^{n_1} r_i + \sum_{j=1}^{n_2} p_j} \quad (6.285)$$

sous les contraintes

$$\boxed{r_i + p_j \geq a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n_1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, n_2} \quad (6.286)$$

$$\boxed{r_i \geq a_{i0} \quad \forall i = 1, \dots, n_1} \quad (6.287)$$

$$\boxed{p_j \geq a_{0j} \quad \forall j = 1, \dots, n_2} \quad (6.288)$$

On voit que le critère **dual modifié** est minimisé lorsque les profits  $r_i$  sont égaux à la plus grande des valeurs entre  $a_{i0}$  et la valeur maximale de leur marge  $a_{ij} - p_j$  pour  $j = 1, \dots, n_2$ . Par conséquent, le problème dual peut être énoncé sous la forme équivalente suivante

$$\boxed{\min_{\mathbf{p} | p_j \geq a_{0j}} q(\mathbf{p})} \quad (6.289)$$

avec

$$\boxed{q(\mathbf{p}) \triangleq \sum_{i=1}^{n_1} \max \left\{ a_{i0}, \max_{j=1, \dots, n_2} \{a_{ij} - p_j\} \right\} + \sum_{j=1}^{n_2} p_j} \quad (6.290)$$

En utilisant les changements de variables,

$$\boxed{r'_i \triangleq r_i - a_{i0} \quad \forall i = 1, \dots, n_1} \quad (6.291)$$

$$\boxed{p'_j \triangleq p_j - a_{0j} \quad \forall j = 1, \dots, n_2} \quad (6.292)$$

le problème précédent peut être énoncé sous **une forme proche de la formulation standard**, à savoir

$$\boxed{\min_{\mathbf{p}' | p'_j \geq 0} q'(\mathbf{p}')} \quad (6.293)$$

avec

$$\boxed{q'(\mathbf{p}') \triangleq \sum_{i=1}^{n_1} \max \left\{ 0, \max_{j=1, \dots, n_2} \{a'_{ij} - p'_j\} \right\} + \sum_{j=1}^{n_2} p'_j + \sum_{j=1}^{n_2} a_{0j} + \sum_{i=1}^{n_1} a_{i0}} \quad (6.294)$$

et

$$\boxed{a'_{ij} \triangleq a_{ij} - a_{i0} - a_{0j} \quad \forall i = 0, \dots, n_1 \quad \forall j = 0, \dots, n_2} \quad (6.295)$$

L'algorithme de l'auction modifié **consiste donc en les mêmes étapes** que l'algorithme de l'auction standard précédemment décrit en apportant les **3 modifications suivantes** :

1. Les variables  $a_{ij}$  et  $p_j$  de l'auction standard seront modifiées en  $a'_{ij}$  et  $p'_j$  et les variables intermédiaires  $v_{ij}, v_{ij^*}, w_{ij^*}, b_{ij^*}$  en

$$v'_{ij} = a'_{ij} - p'_j \quad (6.296)$$

$$v'_{ij^*} = \max\left\{0, \max_{j=1, \dots, n_2} v'_{ij}\right\} \quad (6.297)$$

$$w'_{ij^*} = \max\left\{0, \max_{j=1, \dots, n_2, j \neq j^*} v'_{ij}\right\} \quad (6.298)$$

$$b'_{ij^*} = a'_{ij^*} - w'_{ij^*} + \epsilon \quad (6.299)$$

2. Lors de la phase d'adjudication, si toutes les personnes ont été assignées, alors les objets restant non assignés dans  $S$  seront affectés à la personne 0 ; Si par contre, tous les objets ont été assignés, alors toutes les personnes non encore assignées dans  $S$  seront affectées à l'objet 0.
3. Pour assurer l'optimalité de la solution générée, on devra prendre  $\epsilon < 1 / \max\{n_1, n_2\}$ .

## Intérêt de l'approche duale

L'approche duale présente deux propriétés fondamentales à savoir :

- $q_m^*(\mathbf{u})$  reste toujours **une borne inférieure de la solution primaire  $J^*$**  cherchée ; autrement dit on a toujours  $\forall \mathbf{u}$

$$\boxed{q_m^*(\mathbf{u}) \leq J^*} \quad (6.300)$$

En effet, supposons que  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^*\}$  soit l'assignation 3-D optimale du problème primal. Alors, compte tenu de (6.252) et du fait que  $u_{j_3=0} \equiv 0$  on a toujours

$$\sum_{j_3=0}^{m_k^3} u_{j_3} \left(1 - \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \rho_{j_1 j_2 j_3}^*\right) \equiv 0 \quad (6.301)$$

et par conséquent  $\forall \mathbf{u}$

$$J^* = \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} c_{j_1 j_2 j_3} \rho_{j_1 j_2 j_3}^* + \sum_{j_3=0}^{m_k^3} u_{j_3} \left(1 - \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \rho_{j_1 j_2 j_3}^*\right) \geq q_m^*(\mathbf{u}) \quad (6.302)$$

L'idée consiste alors à maximiser  $q_m^*(\mathbf{u})$  pour tendre inférieurement vers la solution optimale  $J^*$ .

- **la convexité de  $q_m(\mathbf{u})$ .** Cette propriété permet alors d'utiliser des techniques classiques d'optimisation convexes des fonctions non continuement différentiables pour maximiser  $q_m^*(\mathbf{u})$ . La valeur maximale de  $q_m^*(\mathbf{u})$  sera notée  $q_m^*(\mathbf{u}^*)$ . Nous expliciterons plus loin, le principe de maximisation de  $q_m^*(\mathbf{u})$ .

## Majoration de la solution primale

Après avoir minoré la solution primalement, on cherche maintenant à la majorer de façon à construire un encadrement de  $J^*$  qui servira d'indicateur de performance de la méthode (et également de critère d'arrêt). Avant d'aller plus loin dans l'analyse, il faut d'abord remarquer que l'assignation  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^d\}$  associée à la solution duale  $q_m^*(\mathbf{u}^*)$  par la construction directe

$$\rho_{j_1 j_2 j_3}^d = \begin{cases} \omega_{j_1 j_2}^* & \text{si } j_3 = \operatorname{argmin}_p (c_{j_1 j_2 p} - u_p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.303)$$

n'est, en général, pas une solution faisable au problème primal (la contrainte (6.252) ayant été relaxée). La différence  $J^* - q_m^*(\mathbf{u}^*)$  entre la solution primalement et duale est appelée classiquement **saut de dualité exact** en théorie de la dualité. Ce saut reste évidemment inconnu en pratique et n'a pas lieu d'être nul puisque le problème primal est non convexe. Par contre, il est toujours possible de construire des assignations faisables notées  $\mathbf{P}^f = \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^f\}$  à partir de la solution duale. Parmi ces assignations faisables, il en existe au moins une  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}$  qui est la meilleure et on note  $J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\})$  sa valeur associée. Autrement dit,  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}$  est donnée par

$$\boxed{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f} = \arg \min_{\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^f\} \in \mathbf{P}^f} J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^f\})} \quad (6.304)$$

Comme l'assignation est faisable (mais non nécessairement optimale), on a toujours

$$\boxed{J^* \leq J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\})} \quad (6.305)$$

Compte tenu de (6.300) et de (6.305), nous avons donc l'encadrement de  $J^*$  cherché

$$\boxed{q_m^*(\mathbf{u}^*) \leq J^* \leq J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\})} \quad (6.306)$$

L'encadrement trouvé permet de mettre en évidence que le saut de dualité approximatif correspondant à  $J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}) - q_m^*(\mathbf{u}^*)$  fournit une "surestimation" de l'erreur entre la solution faisable et la solution optimale puisque l'on a toujours :

$$\boxed{(J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}) - q_m^*(\mathbf{u}^*)) = (J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}) - J^*) + (J^* - q_m^*(\mathbf{u}^*)) \geq 0} \quad (6.307)$$

L'indicateur de performance (i.e. précision de la solution générée) de la méthode correspond alors au saut de dualité approximatif relatif défini comme

$$\boxed{\delta J \triangleq \frac{J^{*,f}(\mathbf{u}^*, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}) - q_m^*(\mathbf{u}^*)}{|q_m^*(\mathbf{u}^*)|}} \quad (6.308)$$

## Résumé de la méthode de Deb et Pattipati

En résumé, la méthode de Deb consiste en la séquence d'étapes suivantes :

1. **Initialiser la méthode** en choisissant  $\mathbf{u} = [0, \dots, 0]$  (et éventuellement le nombre maximum d'itérations de relaxation souhaité).
2. **Calculer les coûts du problème dual**

$$d_{j_1 j_2} = \min_{j_3} (c_{j_1 j_2 j_3} - u_{j_3})$$

3. **Résoudre le problème dual** (6.266), sous les contraintes (6.259) et (6.260) par l'auction modifié afin d'obtenir  $\{\omega_{j_1 j_2}^*\}$  et  $q_m^*(\mathbf{u})$ .
  - Construire l'assignation duale associée  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^d\}$  par (6.303)
  - tester si cette assignation est faisable
  - Si  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^d\} \in \mathbf{P}^f$  alors on a la solution optimale du problème, i.e.  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^*\} = \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^d\}$ , et **c'est terminé**
4. **Sinon, rechercher la meilleure assignation faisable**  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}$  associée à la solution duale et calculer  $J^{*,f}(\mathbf{u}, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\})$ . Cette recherche est également obtenue par l'algorithme de l'auction modifié comme on le verra.
5. **Evaluer le saut de dualité approximatif relatif**  $\delta J$ . Si  $\delta J$  est inférieur à la précision fixée (typiquement 2 à 3 %) ou si le nombre d'itérations est supérieur à la valeur maximale choisie, alors la méthode est stoppée et on a générée une solution quasi-optimale faisable  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\} \approx \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^*\}$
6. **Sinon, améliorer la solution duale** en mettant à jour le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{u}$  par une méthode d'optimisation convexe de manière à maximiser  $q_m^*(\mathbf{u})$  et retourner à l'étape 2.

## Principe de construction de la meilleure assignation faisable

Nous présentons maintenant le principe de recherche de la meilleure solution faisable associée à une solution duale donnée  $(q_m(\mathbf{u}), \{\omega_{j_1 j_2}^*\})$  (étape 4 de la méthode de Deb). L'idée consiste tout simplement à fixer les assignations  $(j_1, \eta_{j_1})$  données par la solution duale (i.e.  $\eta_{j_1}$  correspond à l'indice de la mesure du senseur 2 associée à la mesure  $j_1$  du senseur 1 dans l'association duale), puis à résoudre le problème d'assignation 2-D suivant :

$$(J^{*,f}, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f}\}) = \min_{\rho_{j_1 \eta_{j_1} j_3}} \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_3=0}^{m_k^3} c_{j_1 \eta_{j_1} j_3} \rho_{j_1 \eta_{j_1} j_3}$$

(6.309)

sous les contraintes

$$\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \rho_{j_1 \eta_{j_1} j_3} = 1 \quad \forall j_3 = 1, \dots, m_k^3$$
(6.310)

$$\sum_{j_3=0}^{m_k^3} \rho_{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad \forall j_1 = 1, \dots, m_k^1 \quad (6.311)$$

En pratique, la solution du problème d'assignation 2-D pour la recherche de la solution faisable sera, là encore, obtenue par l'algorithme de l'"auction" modifié comme on l'avait été évoqué précédemment.

La valeur de  $\eta_{j_1}$  est, en pratique, obtenue pour  $j_1 = 1, \dots, m_k^1$  par :

$$\boxed{\forall j_2 = 1, \dots, m_k^2 \quad \eta_{j_1} = j_2 \quad \text{si} \quad \omega_{j_1 j_2}^* = 1} \quad (6.312)$$

La dimension du problème d'assignation 2-D qui vient d'être formulée devra être augmentée dans le cas où plusieurs mesures du senseur 2 sont affectées à l'hypothèse "bruit thermique" lors de la génération de la solution duale. Cette remarque n'engendre aucune difficulté particulière quant à l'obtention de la solution faisable.

### A propos de la maximisation de $q_m^*(\mathbf{u})$

Il existe de nombreuses techniques d'optimisation permettant la maximisation de  $q_m^*(\mathbf{u})$ . On peut, par exemple, utiliser les méthodes de base telles que la méthode de l'ellipsoïde de Khachian ou la méthode des plans de coupe de Kelley. Ces méthodes cependant présentent une convergence d'autant plus lente que la dimension du problème est grand. Elles sont donc à déconseiller dans de tels cas. Des méthodes de type sous-gradient accéléré (Space Dilatation methods de Shor) présentent une convergence plus rapide et peuvent être employées. La méthode semblant donner actuellement la convergence la plus rapide, selon Somnath Deb et Krishna Pattipati, consiste à mettre à jour, à l'itération  $(l + 1)$ , les composantes de  $\mathbf{u}$  (pour  $j_3 = 1, \dots, m_k^3$ ) par la procédure suivante :

$$\boxed{u_{j_3}^{(l+1)} = u_{j_3}^{(l)} + \left[ \frac{\tilde{J}^{*,f,(l)} - \tilde{q}_m^{*,(l)}}{\|\mathbf{g}^{(l)}\|_2^2} \right] \left[ \frac{\mu_{j_3}^{(l)}}{\frac{1}{m_k^3} (\sum_{j=1}^{m_k^3} \mu_j^{(l)})} \right] g_{j_3}^{(l)}} \quad (6.313)$$

où  $\tilde{J}^{*,f,(l)}$  représente la **meilleure valeur de la solution faisable obtenue jusqu'à l'itération  $(l)$  incluse**, c'est à dire

$$\boxed{\tilde{J}^{*,f,(l)} = \min_{i=1, \dots, l} J^{*,f}(\mathbf{u}^{(i)}, \{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*,f,(i)}\})} \quad (6.314)$$

$\tilde{q}_m^{*,(l)}$  représente la meilleure solution duale obtenue jusqu'à l'itération  $(l)$  incluse, c'est à dire

$$\tilde{q}_m^{*,(l)} = \min_{i=1, \dots, l} q_m(\mathbf{u}^{(i)}) \quad (6.315)$$

$\mathbf{g}^{(l)}$  est le **vecteur des sous-gradients** à l'itération  $(l)$  dont les composantes  $g_{j_3}^{(l)}$  sont données pour  $j_3 = 1, \dots, m_k^3$  par

$$\boxed{g_{j_3}^{(l)} = 1 - \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \sum_{j_2=0}^{m_k^2} \rho_{j_1 j_2 j_3}^{d,(l)}} \quad (6.316)$$

et  $\{\mu_{j_3}^{(l)}, j_3 = 1, \dots, m_k^3\}$  sont les prix atteints par les objets à l'itération  $(l)$  en sortie de l'algorithme de l'“**auction**” **modifié** lors de la construction de la solution faisable  $\{\rho_{j_1 j_2 j_3}^{*, f, (l)}\}$ .

Il faut cependant savoir que cette procédure n'est pas une procédure classique issue de l'analyse convexe mais une heuristique (partiellement basée sur la méthode de sous-gradient accéléré) proposée par S. Deb. On peut donc légitimement supposer qu'il existe potentiellement d'autres méthodes (ou heuristiques) induisant des convergences encore plus rapides ... à découvrir ! L'enjeu est important dans les problèmes d'assignation multi-senseurs de grandes dimensions.

### Exemple de simulations

Nous présentons ici 2 exemples de résultats de convergence obtenus sur un cube et un parallélépipèdes générés aléatoirement ayant une densité maximale. La dimension du côté de chaque parallélépipède (ou cube) représente directement le nombre de mesures délivrées par chaque senseur à un instant donné. Un grand nombre de simulations a été réalisé pour différentes tailles de parallélépipèdes et différentes bornes de coûts. Pour les problèmes de petites dimensions, les solutions générées par la méthode de Deb ont toujours été en accord avec les solutions optimales obtenues par une méthode de balayage exhaustif.

Comme on peut le constater sur ces 2 exemples, la convergence de la méthode est très rapide pour les premières itérations et on atteint généralement une précision de l'ordre de 5 % au bout de la trentième itération. La convergence tend à se ralentir sensiblement pour les itérations suivantes et il n'est pas rare de devoir attendre une centaine d'itérations pour être à une précision de 1 % de la solution optimale. Malgré tout, la méthode est fiable et rapide compte tenu des dimensions des problèmes à résoudre et comparativement aux méthodes concurrentes. Cette méthode reste donc un outil puissant hautement recommandable pour les systèmes de pistage multi-cibles multi-senseurs futurs.

Dans les 2 simulations présentées les coûts  $c_{j_1 j_2 j_3}$  ont été générés aléatoirement entre les bornes -1000 et 1000. La figure 6.1 présente le résultat obtenu par la méthode de Deb appliquée à un cube de dimensions  $(20+1) \times (20+1) \times (20+1)$ . On constate dans cet exemple que la solution quasi-optimale (i.e. avec moins de 1 pourcent d'erreur) a été atteinte à l'itération 63. La figure 6.2 présente le résultat obtenu par la méthode appliquée à un parallélépipède de dimensions  $(10+1) \times (15+1) \times (20+1)$ . Ici on obtient une précision de 1.7 % à la centième itération. Ces résultats sont représentatifs du comportement de la convergence de la méthode basée sur l'heuristique de Deb (relation (6.313)). Des essais réalisés pour la méthode de l'ellipsoïde ou de l'état dilaté confirment la supériorité de cette heuristique. On peut cependant penser que d'autres méthodes peuvent encore accroître la vitesse de convergence de la méthode d'assignation par relaxation lagrangienne, en particulier les techniques de “Bundle Processes” développées à l'INRIA

par C. Lemaréchal.

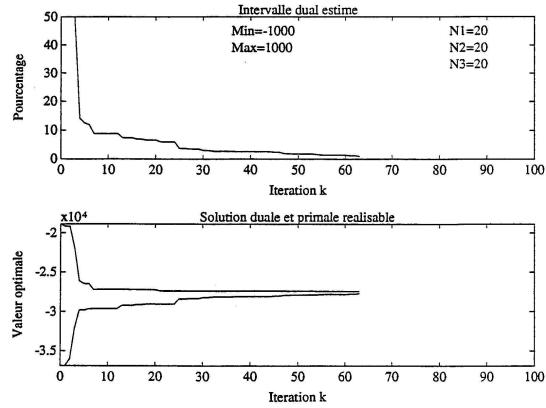


FIG. 6.1 – Assignation 3D sur cube  $21 \times 21 \times 21$

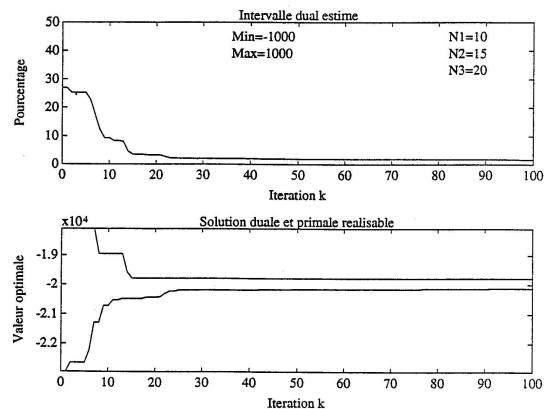


FIG. 6.2 – Assignation 3D sur parallélépipède  $11 \times 16 \times 21$

### 6.5.3 Extension au cas multi-senseurs

La méthode d'assignation quasi-optimale de Deb et Pattipati qui vient d'être présentée dans le cas simplifié à 3 senseurs peut être généralisée au cas de  $S$  senseurs ( $S \geq 3$ ). L'extension des notations au cas  $S$ -senseur est immédiate. Au niveau de la partition des mesures, on devra, non plus considérer un triplet de mesures, mais un  $S$ -uplet de mesures du type

$$\boxed{\mathbf{z}_{j_1 \dots j_S}(k) \triangleq (\mathbf{z}_{j_1}^1(k), \mathbf{z}_{j_2}^2(k), \dots, \mathbf{z}_{j_S}^S(k)) = \{\mathbf{z}_{j_s}^s\}_{s=1}^S} \quad (6.317)$$

La vraisemblance d'un S-uplet conditionnellement à l'état présumé d'une cible  $t_n$  est donné par

$$\Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S}(k) | x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) = \prod_{s=1}^S \left[ P_d^s(t_n) p(\mathbf{z}_{j_s}^s(k) | x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \right]^{1-\delta_{0j_s}} \left[ 1 - P_d^s(t_n) \right]^{\delta_{0j_s}} \quad (6.318)$$

où  $P_d^s(t_n)$  est la probabilité de détection de la cible  $t_n$  par le senseur  $s$  et où  $\delta_{0j_s}$  est la fonction delta de Kronecker définie en (6.228).

A chaque instant, l'ensemble des mesures  $\mathbf{Z}(k)$ , peut être partitionné en deux sous-ensembles possibles de S-uplets de mesures  $\mathbf{Z}_c$  et  $\mathbf{Z}_f$  associés ou non à une cible. On désigne par  $\gamma$  une partition possible de l'espace des mesures :

$$\boxed{\gamma = \{\mathbf{Z}_c, \mathbf{Z}_f\}} \quad (6.319)$$

$\mathbf{Z}_c \triangleq \{\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S}(k), \quad j_s = 0, \dots, m_k^s \quad s = 1, \dots, S\}$  est l'ensemble des S-uplets de mesures associés aux cibles et  $\mathbf{Z}_f$  est l'ensemble des S-uplets de fausses mesures envisagés pour la partition  $\gamma$  choisie.  $\mathbf{Z}_f$  correspond aux  $N = (m_k^1 + m_k^2 + \dots + m_k^S)$  évènements indépendants (pour  $j_s = 1, 2, \dots, m_k^s$  et  $s = 1, 2, \dots, S$ ) :

$$\alpha_{j_s}^s = \begin{cases} 1 & \text{si la mesure } j_s \text{ du senseur } s \text{ est fausse} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.320)$$

Comme dans le cas simplifié à 3 senseurs, la construction d'une partition envisageable nécessite que soient respectées les deux conditions suivantes :

1. Chaque mesure délivrée par un senseur provient d'une seule source, c'est à dire

$$\boxed{\mathbf{Z}(k) = \mathbf{Z}_c \cup \mathbf{Z}_f} \quad (6.321)$$

2. Chaque mesure ne peut être associée qu'à une cible et une seule au plus. Ceci impose la contrainte

$$\boxed{\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S} \cap \mathbf{Z}_{j'_1 \dots j'_S} = \emptyset \quad \forall j_s \neq j'_s, \quad s = 1, \dots, S} \quad (6.322)$$

On définit, comme précédemment, les variables d'évènements binaires ( $j_s = 0, 1, \dots, m_k^s$ ) par

$$\rho_{j_1 \dots j_S} = \begin{cases} 1 & \text{si le S-uplet } \mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S} \in \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Compte tenu du fait que chaque cible est supposée être détectée au moins par un senseur, on a toujours  $\rho_{00\dots 0} \equiv 0$ . Avec ces notations, l'ensemble des contraintes de faisabilité est équivalent à l'ensemble de contraintes égalités linéaires suivant (pour  $j_s = 1 \dots m_k^s$  et  $s = 1, \dots, S$ )

$$\boxed{\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_{s-1}=0}^{m_k^{s-1}} \sum_{j_{s+1}=0}^{m_k^{s+1}} \dots \sum_{j_S=0}^{m_k^S} \rho_{j_1 \dots j_S} + \alpha_{j_s}^s = 1} \quad (6.323)$$

Désignons par  $\Gamma \triangleq \{\gamma\}$  l'ensemble de toutes les partitions  $\gamma$  possibles et par  $\zeta(\gamma)$  l'évènement suivant : "la partition  $\gamma$  est correcte". Pour normaliser la fonction de vraisemblance de manière à ce qu'elle soit indépendante du nombre de mesures délivrées, on définit la partition particulière  $\gamma_0 \in \Gamma$  comme

$$\boxed{\gamma_0 \triangleq \{\mathbf{Z}_c = \emptyset \text{ et } \mathbf{Z}_f = \mathbf{Z}\}} \quad (6.324)$$

La partition des mesures **la plus vraisemblable**  $\gamma^*$  est obtenue en recherchant la partition  $\gamma \in \Gamma$  qui **maximise le rapport de vraisemblance normalisé** (6.235) avec

$$\boxed{L(\gamma) = p[\mathbf{Z}(k)|\zeta(\gamma)] = \left[ \prod_{\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S} \in \gamma} \Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S}(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n}) \right] \left[ \prod_{s=1}^S \left( \frac{1}{V_s} \right)^{m_k^s - T_s(\gamma)} \right]} \quad (6.325)$$

et

$$\boxed{L(\gamma_0) = p[\mathbf{Z}(k)|\zeta(\gamma_0)] = \prod_{s=1}^S \left[ \frac{1}{V_s} \right]^{m_k^s}} \quad (6.326)$$

$T_s(\gamma)$  est le nombre de cibles supposées détectées par le senseur  $s$  dans la partition  $\gamma$ . En pratique, les positions des cibles  $(x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$  étant inconnues, les fonctions de vraisemblance  $\Lambda(\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S}(k)|x_{t_n}, y_{t_n}, z_{t_n})$  seront remplacées par leur estimée  $\hat{\Lambda}(\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S}(k)|\hat{x}_{t_n}, \hat{y}_{t_n}, \hat{z}_{t_n})$  (cf paragraphe précédent).

Le problème général de partitionnement optimal est le même que précédemment, à savoir (6.245) ou de façon équivalente, à la minimisation de la log-vraisemblance négative  $J(\gamma)$  du rapport (cf (6.246)). Compte tenu du fait que  $\mathbf{Z}_f \in \gamma_0 \cap \gamma$ , la contribution des éléments de  $\mathbf{Z}_f$  dans  $\hat{L}(\gamma)/L(\gamma_0)$  se simplifie et le critère  $J(\gamma)$  à minimiser s'exprime comme

$$\boxed{J(\gamma) = [\ln L(\gamma_0) - \ln \hat{L}(\gamma)] = \sum_{\mathbf{Z}_{j_1 \dots j_S} \in \mathbf{Z}_c} c_{j_1 \dots j_S}} \quad (6.327)$$

où les coûts  $c_{j_1 \dots j_S}$  sont donnés par (6.248) dans le cas dynamique ou par (6.249) dans le cas statique (avec l'indice de sommation  $s$  variant de 1 à  $S$ ).

Ce problème de minimisation peut être reformulé comme un problème d'assignation S-D à savoir

$$J^* = \min_{\rho_{j_1 \dots j_S} \in P} J(\rho) \quad (6.328)$$

avec

$$\boxed{J(\rho) = \sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_S=0}^{m_k^S} c_{j_1 \dots j_S} \rho_{j_1 \dots j_S}} \quad (6.329)$$

$P$  est l'**ensemble des partitions faisables** (i.e acceptables). Chaque partition est considérée comme acceptable si elle remplit les hypothèses de bases énoncées en (6.232) et (6.233). La faisabilité d'une partition revient mathématiquement à satisfaire l'ensemble des contraintes d'inégalités suivantes (pour

$j_s = 1 \dots m_k^s$  et  $s = 1, \dots, S$ ) :

$$\boxed{\sum_{j_1=0}^{m_k^1} \dots \sum_{j_{s-1}=0}^{m_k^{s-1}} \sum_{j_{s+1}=0}^{m_k^{s+1}} \dots \sum_{j_S=0}^{m_k^S} \rho_{j_1 \dots j_S} \leq 1} \quad (6.330)$$

Ce problème général pourra être résolu par un mécanisme semblable à celui déjà présenté. Il faut cependant savoir qu'un **prétraitement de coloration** doit être fait au niveau de l'affectation des coûts associés aux mesures fictives afin de transformer l'ensemble des contraintes d'inégalités en un ensemble de contraintes d'égalités. Le détail de ce prétraitement est donné en [PDBSW90, DPBS92b, DPBSY94]. Nous nous contenterons ici d'expliquer uniquement le principe général du mécanisme de la méthode d'assignation S-D proposée par Deb et Pattipati.

Dans le cas 3-D, on a vu que le problème d'assignation était résolvable par une série de 2 problèmes 2-D (1 pour la recherche de la solution duale et 1 pour la construction de la solution faisable). Dans le cas S-D, l'idée est exactement la même et consiste à relâcher successivement  $r = 1, \dots, S - 2$  contraintes (phase de descente) jusqu'à descendre au problème de base 2-D qui sera résolu par l'auction modifié. La seconde phase (appelée phase de remontée) consiste à utiliser la solution 2-D pour construire la solution 3-D optimale faisable en maximisant le vecteur  $\mathbf{u}^{S-2}$  des multiplicateurs de Lagrange de l'étape 2-D. D'une façon similaire, la construction de la solution à l'étape r utilisera la solution du problème relaxé de dimension (r-1). Ce mécanisme de remontée est itéré jusqu'à l'obtention de la solution du problème primal de dimension S. A la r-ème étape, le problème dual à résoudre est du type

$$\boxed{\max_{\mathbf{u}^r} q_m(\mathbf{u}^r)} \quad (6.331)$$

où

$$\boxed{q_m(\mathbf{u}^r) \triangleq \min_{\omega_{j_{r+1} \dots j_S}^r} \sum_{j_{r+1}=0}^{m_k^{r+1}} \dots \sum_{j_S=0}^{m_k^S} d_{j_{r+1} \dots j_S}^r \omega_{j_{r+1} \dots j_S}^r + \sum_{j_r=0}^{m_k^r} u_{j_r}^r} \quad (6.332)$$

avec

$$d_{j_{r+1} \dots j_S}^r \triangleq \min_{j_r} d_{j_r \dots j_S}^{r-1} - u_{j_r}^r \quad (6.333)$$

et où  $\{\omega_{j_{r+1} \dots j_S}^r\}$  est la solution de problème d'assignation de dimension  $S - r - 1$  et  $d_{j_1 \dots j_S}^0 \equiv c_{j_1 \dots j_S}$ . A chaque étape r, la maximisation de  $q_m(\mathbf{u}^r)$  exploitera une des méthodes classiques d'optimisation convexe discutées antérieurement et basées sur l'exploitation des sous-gradients

$$g_{j_r}^{(l)} = 1 - \sum_{j_{r+1}=0}^{m_k^{r+1}} \dots \sum_{j_S=0}^{m_k^S} \rho_{j_r j_{r+1} \dots j_S}^{d,(l),r} \quad (6.334)$$

et où  $\{\rho_{j_r j_{r+1} \dots j_S}^{d,(l),r}\}$  est la solution duale du problème d'assignation de dimension  $S - r - 1$ . Cette solution

est obtenue par la construction directe

$$\rho_{j_r j_{r+1} \dots j_s}^{d,(l),r} = \begin{cases} \omega_{j_{r+1} \dots j_s}^{r,(l)} & \text{si } j_r = \operatorname{argmin}_p (d_{pj_{r+1} \dots j_s}^{r-1} - u_p^r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.335)$$

## 6.6 Méthode de gestion des pistes

### 6.6.1 Présentation

Dans un contexte de pistage multi-senseurs multi-cibles, la méthode de Deb d'association optimale des mesures et les méthodes de pistage présentées conduisent généralement à de bons résultats mais pour une complexité importante voire rédhibitoire lorsque la densité de cibles et/ou de clutter est élevée. En fait, dans la plupart des applications actuelles de surveillance embarquées, on ne dispose que de moyens de calculs limités et, par conséquent, les filtres de poursuite utilisés restent le plus souvent rudimentaires. En conséquence de quoi, les pistes générées ont une qualité beaucoup moins bonne que celle obtenue par les méthodes plus élaborées décrites précédemment.

Dans un tel contexte, il faut donc pouvoir gérer les pistes dégradées (résultant d'une mauvaise association de mesure ou d'une mauvaise fusion multi-senseurs par exemple) qui risquent de saturer inutilement le système de surveillance. La gestion de ces pistes n'est pas une chose aisée, en général, car la nature de la dégradation de la piste doit d'abord être identifiée avant la gestion proprement dite de la piste (c'est à dire la **déclaration de son maintien, sa confirmation ou son élimination**).

En effet, l'élimination d'une piste déclarée ne doit pas être effectuée directement car la nature même de sa dégradation peut avoir trois origines complètement différentes :

1. Soit un disfonctionnement du ou des senseurs,
2. Soit un mauvais choix dans l'association des mesures pour la mise à jour de la piste,
3. Soit enfin une manœuvre de la cible.

La gestion des pistes dépend donc fortement de leur qualité conditionnée par la nature de la dégradation inhérente. En pratique, a priori, on ne connaît pas la nature de cette dégradation et il faut donc l'estimer par des méthodes très fines pour décider soit de l'abandon ou du maintien de la piste au cycle suivant. Nous présentons dans la suite une méthode simple et efficace permettant la gestion des pistes.

### 6.6.2 Evaluation de la dégradation d'une piste

La base des méthodes de gestion de piste s'appuie sur l'exploitation du résidu de mesure  $\tilde{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)$  du filtre de poursuite pour tester la défaillance du senseur [May76], détecter l'association incorrecte de la mesure [Jef89] ou la manœuvre de la cible [Bla86], [BSF88]. Des travaux récents ont néanmoins montré que dans certaines applications l'utilisation de ces résidus ne permet pas toujours une bonne discrimination. Dans de tels cas, la détection de la dégradation peut cependant être faite par l'apport d'information de reconnaissance suffisante au niveau des plots reçus. Cette approche spécifique peut être trouvée en [MD95].

On ne considère pas ici les problèmes de détection de panne de senseur car il existe le plus souvent, dans la plupart des systèmes de pistage actuels, des moyens "hardware" ou "software" spécifiques au contrôle du bon fonctionnement des senseurs. L'attention est portée sur la détection des manœuvres et des mauvaises associations qui engendrent la dégradation d'une piste. On rappelle que des méthodes sophistiquées dans le cadre du MHF et du JPDAF existent déjà pour un coût en calcul généralement important [Gau84] et [BBS84] et [SI89]. On préconise ici une méthode classique et plus "économique" pour résoudre le problème.

Pour simplifier la présentation, on supposera n'avoir à faire qu'à une seule piste. Cette piste globale, qui résulte de la fusion des informations délivrées par les différents senseurs (par une méthode de fusion choisie a priori par le concepteur), est représentative de l'état complet de la cible (position en 3-D, vitesse, accélération). Ceci peut être par exemple obtenu par traitement adapté des mesures angulaires de plusieurs senseurs IR passifs (2-D) par exemple, ou par mesures issues d'un RADAR 3-D ou encore d'une combinaison d'un RADAR-2D avec un senseur IR, etc .... La méthode la plus simple pour gérer la piste consiste à examiner la séquence (ou une partie de cette séquence) des résidus de mesures  $\tilde{\mathbf{z}}(i), i = 0, \dots, k$  en construisant la statistique  $D^{k-l+1}$  définie comme

$$D^{k-l+1} \triangleq \sum_{i=l}^k D_i \quad (6.336)$$

où  $D_i \triangleq D(\mathbf{z}(i)) = \tilde{\mathbf{z}}(i)' \mathbf{S}(i)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}(i)$ ;  $l$  désigne l'instant de départ de la fenêtre temporelle servant à construire  $D^{k-l+1}$ .  $k$  désigne l'instant courant et  $\mathbf{S}(i)$  représente la matrice de covariance de l'innovation globale calculée à l'instant  $i$ .

En supposant que **toutes les mesures  $\mathbf{z}(i)$  soient correctes et que les innovations  $\tilde{\mathbf{z}}(i)$  soient gaussiennes**, la statistique  $D^{k-l+1}$  est une variable aléatoire du  $\chi^2$  de degré  $(k - l + 1) \times n_z$ . On peut alors mettre en œuvre le test statistique classique du  $\chi^2$  à savoir

$$D^{k-l+1} \leq \gamma(k - l + 1) \quad (6.337)$$

$\gamma(k - l + 1)$  est le seuil du test du  $\chi^2$ . Sa valeur est choisie a priori en fonction de la qualité du test que l'on veut.

Une variante de la méthode consiste à utiliser une fenêtre à **oubli exponentiel** pour construire la statistique  $D^{k-l+1}$ . Si l'on désigne par  $\alpha$  le paramètre d'oubli exponentiel, compris entre 0 et 1,  $D^{k-l+1}$  sera construit selon la forme récursive suivante :

$$D^{k-l+1} \triangleq \alpha D^{k-l} + D_k \quad (6.338)$$

On peut montrer [BSF88] que **sous l'hypothèse d'un modèle gaussien-markovien**, la statistique  $D^{k-l+1}$  suit pratiquement une loi du  $\chi^2$  de degré  $n_z(1+\alpha)/(1-\alpha)$ . L'utilisation seule de cette statistique **ne permet pas cependant de déterminer la nature de la dégradation quand elle apparaît**. De plus, elle ne garantit pas forcément que la piste retenue soit la bonne (cf paragraphe suivant). Elle permet seulement **de détecter une dégradation** de la qualité de la piste.

### 6.6.3 Probabilité d'acceptation d'une fausse piste

Comme on vient de le signaler, le test précédent ne garantit en rien que la piste retenue corresponde à une bonne piste (i.e piste associée à une cible réelle). En effet, on va montrer qu'il existe une probabilité non nulle  $P_{FT}$  pour qu'une fausse piste satisfasse aussi ce test. L'idée consiste donc à évaluer cette probabilité en fonction de la taille  $k - l + 1$  de l'échantillon. Du point de vue opérationnel, la valeur de  $P_{FT}$  sera une contrainte du cahier des charges du système ; celle-ci imposera la valeur minimale de  $k - l + 1$  à utiliser pour le test.

Supposons que toutes les mesures choisies pour l'association correspondent à des fausses alarmes uniformément réparties dans la fenêtre de validation du filtre de volume

$$V_\gamma = \{\mathbf{z} \text{ tel que } D(\mathbf{z}) \leq \gamma\} \quad (6.339)$$

alors on a pour  $0 \leq a \leq \gamma$

$$\Pr\{D_i \leq a\} = (a/\gamma)^{n_z/2} \quad (6.340)$$

La densité de probabilité de  $D_i$  pour  $0 \leq D_i \leq \gamma$  s'écrit

$$p(D_i) = \frac{n_z}{2} \frac{D_i^{(n_z/2)-1}}{\gamma^{n_z/2}} \quad (6.341)$$

La moyenne et la variance de  $D_i$  est alors donnée par [Pap84]

$$\mu_i \triangleq E[D_i] = \frac{n_z}{n_z + 2} \gamma \quad (6.342)$$

$$\sigma_i^2 \triangleq \text{Var}[D_i] = \frac{4n_z}{(n_z + 4)(n_z + 2)^2} \gamma^2 \quad (6.343)$$

Si l'on suppose que les **fausses alarmes sont temporellement et spatialement indépendantes** d'un balayage à l'autre, alors la densité  $p(D^{k-l+1})$  de  $D^{k-l+1}$  est la **convolution des  $k-l+1$  densités**  $p(D_i)$  pour  $i = l, \dots, k$ . La moyenne et la variance de  $D^{k-l+1}$  est alors donnée par

$$\mu \triangleq E[D^{k-l+1}] = (k - l + 1)\mu_i \quad (6.344)$$

$$\sigma^2 \triangleq \text{Var}[D^{k-l+1}] = (k - l + 1)\sigma_i^2 \quad (6.345)$$

Dans le cas particulier où  $n_z = 2$ , l'expression de  $p(D^{k-l+1})$  peut être obtenue analytiquement [BSL91]. Dans le cas  $n_z > 2$ , le calcul analytique devient très complexe. En pratique, on pourra cependant utiliser l'approximation gaussienne pour évaluer la probabilité d'accepter des fausses pistes  $P_{FT} \triangleq \Pr\{D^{k-l+1} \leq \gamma(k - l + 1)\}$ . On prendra donc

$$P_{FT} \approx G\left(\frac{\gamma(k - l + 1) - \mu}{\sigma}\right) \quad (6.346)$$

avec

$$G(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \quad (6.347)$$

Cette probabilité permettra de **quantifier la taille de l'échantillon** à traiter pour répondre aux exigences du cahier des charges du système de surveillance.

#### 6.6.4 Détection et élimination des pistes fantômes

Dans le cas particulier du pistage par deux (voire plus) senseurs 2-D **infrarouge** apparaît le problème incontournable de la corrélation des pistes déjà évoqué. A ce problème s'ajoute celui de la génération éventuelle de cibles fantômes dues à la géométrie du phénomène et la présence possible de cibles multiples. En pratique la suppression des cibles fantômes peut être obtenue efficacement en gérant judicieusement **l'évolution de la différence entre les angles d'inclinaison de cibles**. L'angle d'inclinaison d'une cible est défini comme l'angle dièdre entre un plan  $P_{OS_1S_2}$ , contenant la paire de senseurs  $S_1$  et  $S_2$  et un point de référence  $O$ , et un second plan  $P_{TS_1S_2}$ , contenant  $S_1$ ,  $S_2$  et la cible  $T$  (voir figure 9.1). Dans l'hypothèse où **les 2 senseurs observent la même cible**, les deux angles d'inclinaison  $l_1$  et  $l_2$  associés à  $S_1$  et  $S_2$  doivent être **identiques** (au bruit de mesure près). Il faut savoir que la gestion des angles dièdres n'est pas limitée à la configuration bi-senseurs puisque les **angles dièdres** peuvent être calculés pour chacune des paires de senseurs possibles intervenant dans le système multi-senseurs. La discrimination d'une vraie cible d'une fausse (cible fantôme) va donc exploiter ces angles dièdres évalués au niveau de

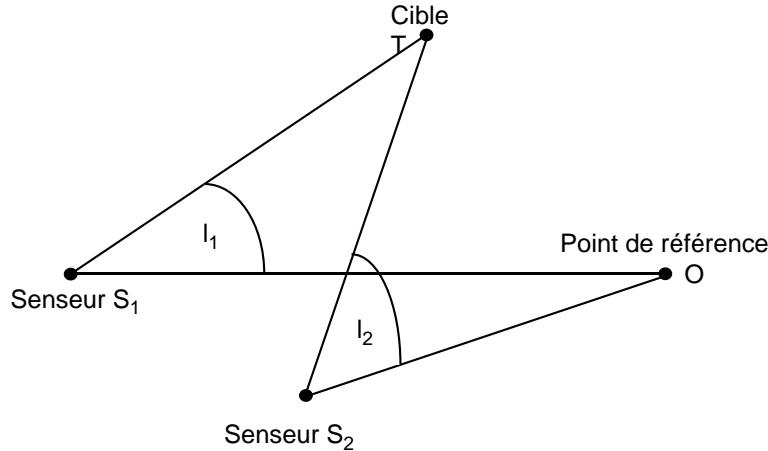


FIG. 6.3 – Géométrie du problème

chaque senseur.

Nous explicitons maintenant en détail le principe de gestion des angles dièdres pour la suppression des cibles fantômes. Au niveau de chaque senseur, les mesures angulaires délivrées permettent d'estimer localement la position estimée  $\hat{T}_1$  et  $\hat{T}_2$  de la cible. Ceci nous permet d'obtenir les plans  $P_{\hat{T}_1 S_1 S_2}$  et  $P_{\hat{T}_2 S_1 S_2}$ . Nous pouvons alors calculer les vecteurs  $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2$  et  $\hat{\mathbf{u}}_{ref}$  normaux aux plans  $P_{\hat{T}_1 S_1 S_2}$ ,  $P_{\hat{T}_2 S_1 S_2}$  et au plan de référence  $P_{OS_1 S_2}$ . Les angles entre les vecteurs  $\hat{\mathbf{u}}_1$  et  $\hat{\mathbf{u}}_{ref}$  et entre  $\hat{\mathbf{u}}_1$  et  $\hat{\mathbf{u}}_{ref}$  correspondent aux angles d'inclinaison  $l_1$  et  $l_2$  cherchés. Lorsque les mesures sont asynchrones, les mesures d'un senseur doivent alors être interpolées de façon à les synchroniser avec l'autre senseur.

La méthode de gestion des angles dièdres est semblable à la précédente. On définit la statistique suivante

$$A^{k-l+1} \triangleq \sum_{i=l}^k A_i \quad (6.348)$$

avec

$$A_k \triangleq \frac{(l_1(k) - l_2(k))^2}{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2} \quad (6.349)$$

$\sigma_{l_j}^2$  est la variance de l'angle d'inclinaison au niveau du senseur  $j$ ,  $j = 1, 2$ . Cette variance est donnée par

$$\sigma_{l_j}^2 = \hat{\mathbf{u}}'_{l_j} \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{u}}_{l_j} \quad (6.350)$$

$\mathbf{B}_j$  est la matrice transformation permettant de passer des mesures 2-D à l'angle d'inclinaison  $l_j$ . En fait

l'angle d'inclinaison  $l_j$  pourra être exprimé sous la forme classique d'une équation de mesure du type

$$\begin{aligned} l_j(k) &= \mathbf{B}_j \mathbf{z}_j(k) = \mathbf{B}_j [\mathbf{H}_j(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_j(k)] \\ &= \mathbf{B}_j \mathbf{H}_j(k) \mathbf{x}(k) + \nu_j(k) \\ &= l_j^r(k) + \nu_j(k) \end{aligned} \quad (6.351)$$

où  $l_j^r(k)$  désigne le véritable angle d'inclinaison (non bruité),  $\mathbf{v}_j(k)$  est le bruit de mesure (supposé gaussien) du senseur  $j$  et  $\nu_j(k)$  est le bruit de mesure associé à la "mesure"  $l_j(k)$ .

Compte tenu de cette remarque, on voit que  $A_k$  peut aussi s'écrire

$$A_k \triangleq \frac{(l_1(k) - l_2(k))^2}{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2} = (b(k) + \nu(k))^2 \quad (6.352)$$

avec

$$b(k) \triangleq \frac{(l_1^r(k) - l_2^r(k))}{\sqrt{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2}} \quad (6.353)$$

$$\nu(k) \triangleq \frac{(\nu_1(k) - \nu_2(k))}{\sqrt{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2}} \quad (6.354)$$

En supposant que les angles d'inclinaisons à chaque instant **correspondent bien à la même cible**, et que les différences  $(l_1(k) - l_2(k))$  soient **gaussiennes**, la statistique  $A^{k-l+1}$  suivra une loi du  $\chi^2$  de degré 1 ou pratiquement une loi du  $\chi^2$  de degré  $(1+\alpha)/(1-\alpha)$  si l'approche par oubli exponentiel est adoptée. On peut comme précédemment, mettre en œuvre le test classique du  $\chi^2$  à savoir

$$A^{k-l+1} \leq \gamma(k-l+1) \quad (6.355)$$

$\gamma(k-l+1)$  étant le seuil du test du  $\chi^2$ .

L'intérêt d'utiliser les "mesures"  $(l_1(k) - l_2(k))$  tient de son **indépendance vis à vis du modèle d'évolution** des cibles. Par conséquent, même en cas de manœuvre de la cible, la statistique  $A^{k-l+1}$  conserve théoriquement la même loi. Ce simple test permet alors, en théorie, de discriminer les pistes réelles des pistes fantômes. Des précautions doivent cependant être prises au niveau de la taille de l'échantillon  $k-l+1$  pour s'assurer que la probabilité d'acceptation d'une piste fantôme  $P_{GT}$  reste suffisamment faible. Une analyse semblable à celle du paragraphe précédent doit donc être menée.

### 6.6.5 Probabilité d'acceptation d'une piste fantôme

Comme on vient de le signaler, le test précédent ne garantit en rien que la piste retenue corresponde à une bonne piste (i.e piste associée à une cible réelle). En effet, il existe une probabilité non nulle  $P_{GT}$  pour qu'une piste fantôme (**Ghost Track**) satisfasse aussi ce test. On cherche donc à évaluer cette probabilité

en fonction de la taille  $k - l + 1$  de l'échantillon. Comme pour  $P_{FT}$ , la valeur de  $P_{GT}$  sera une contrainte du cahier des charges du système ; celle-ci imposera la valeur minimale de  $k - l + 1$  à utiliser pour le test.

On rappelle que pour une piste fantôme, on a nécessairement  $b(k) \neq 0$  ( $b(k) = 0$  étant uniquement obtenu lorsque les deux senseurs observent une même cible réelle). Par conséquent, dans le cas d'une fusion sur un fantôme à l'instant  $k$ , la densité de  $A_k$  est une loi du  $\chi^2$  décentrée de paramètre  $\delta = b(k)^2$ . La densité de  $A^{k-l+1}$  sera également une loi du  $\chi^2$  décentrée ayant pour paramètre  $\lambda = \sum_{i=l}^k b(i)^2$ . L'expression analytique de  $p(A^{k-l+1})$  est donnée par [Mui82]

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta/2} (\delta/2)^j}{j!} \frac{x^{-1/2+j} e^{-x/2}}{2^{1/2+j} \Gamma(1/2 + j)} \quad (6.356)$$

Ainsi, la probabilité  $P_{GT}$  d'accepter une piste fantôme sera donnée par

$$P_{GT} \triangleq \Pr\{A^{k-l+1} \leq \gamma(k - l + 1)\} = \int_0^{\gamma(k - l + 1)} p(x) dx \quad (6.357)$$

L'expression analytique de  $P_{GT}$  est compliquée. En pratique, elle sera remplacée par **l'approximation gaussienne suivante**

$$P_{GT} \approx G\left(\frac{\gamma(k - l + 1) - \mu}{\sigma}\right) \quad (6.358)$$

où  $G(x)$  est donné en (6.347) et où  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont respectivement la moyenne et la variance de la variable  $A^{k-l+1}$  données par [Mui82]

$$\mu \triangleq E[A^{k-l+1}] = 1 + \lambda \quad (6.359)$$

$$\sigma^2 \triangleq Var[A^{k-l+1}] = 2 + 4\lambda \quad (6.360)$$

Dans le cas où la statistique  $A^{k-l+1}$  est construite à partir d'un facteur **d'oubli exponentiel**  $0 \leq \alpha < 1$ , on aura

$$\mu \triangleq E[A^{k-l+1}] = \frac{1}{1-\alpha} + (1+\alpha) \sum_{i=l}^k \alpha^2 (k-i) b(i)^2 \quad (6.361)$$

$$\sigma^2 \triangleq Var[A^{k-l+1}] = \frac{2}{1-\alpha} + 4(1+\alpha) \sum_{i=l}^k \alpha^2 (k-i) b(i)^2 \quad (6.362)$$

Cette probabilité permettra de quantifier la taille  $k - l + 1$  de l'échantillon pour s'assurer la **réjection des pistes fantômes**. Il est à noter que le raisonnement ici mené suppose implicitement la connaissance des  $b(i)$ . Cette hypothèse est généralement non valide. Par conséquent, on utilisera en fait pour la mise en œuvre du test, les estimées  $\hat{b}(i)$  données par

$$\hat{b}(i) = \frac{(\hat{l}_1(i) - \hat{l}_2(i))}{\sqrt{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2}} \quad (6.363)$$

avec pour  $j = 1, 2$

$$\hat{l}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{H}_j(i) \hat{\mathbf{x}}(i|i) \quad (6.364)$$

### 6.6.6 Résumé de la méthode de gestion des pistes

Nous sommes maintenant en mesure de décrire le principe général de la méthode de gestion des pistes. Cette méthode est basée sur les 6 étapes suivantes [Roe91b] :

1. Construire les statistiques (6.336) (ou (6.338)) locales à partir des innovations des filtres locaux et détecter ou non la dégradation des pistes locales via (6.337).
2. Construire  $A^{k-l+1}$  par (6.348) et tester la nature “fantomatique” de la piste fusionnée par (6.355).
3. Si les deux tests précédents sont satisfait, la piste fusionnée est déclarée de bonne qualité (i.e. elle correspond à une cible réelle).
4. Si le test (6.337) échoue et le test (6.355) est satisfait, alors on vient de détecter une manœuvre de la cible et il faut donc adapter le filtre de poursuite à un certain modèle de manœuvre ou utiliser des techniques plus sophistiquées telles que l'IMM par exemple.
5. Si le test (6.337) est satisfait et le test (6.355) échoue, alors cela signifie qu'il y a eu une erreur dans la fusion des deux pistes locales et que l'on est en train de pister une cible fantôme. On doit alors tenter une autre association de pistes.
6. Si les tests (6.337) et (6.355) échouent, alors la piste sera déclarée comme fausse et devra être éliminée.

# Chapitre 7

## Pistage de cibles manœuvrantes

### 7.1 Bref panorama des principales méthodes existantes

Dans les chapitres précédents, les cibles étaient toujours implicitement supposées **non manœuvrantes** et l'on supposait connues les statistiques des bruits intervenants dans le modèle de dynamique/observation des cibles (matrices  $\mathbf{Q}(k)$  et  $\mathbf{R}(k)$ ). En pratique, il va de soi que ces paramètres ne sont jamais bien connus et **peuvent varier au cours du temps** en fonction de la capacité de manœuvrage des cibles. De plus, les instants de manœuvre ne sont généralement pas connus du système de poursuite (sauf dans le cas d'applications civiles avec des avions coopératifs). Les approches possibles les plus classiques pour traiter le pistage de cibles manœuvrantes, sont basées soit en considérant :

- **la commande inconnue mais non aléatoire :**

On cherchera alors à estimer la commande. Une cible manœuvrante peut être modélisée dans ce cas par une équation générale de dynamique (on ne considère que le cas linéaire ici) du type

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (7.1)$$

où  $\mathbf{u}(k)$  est l'entrée (la commande) imposée lors de la manœuvre de la cible. On parle alors de technique d'**input estimation (IE)**. Deux solutions sont possibles : soit utiliser directement l'estimée  $\hat{\mathbf{u}}(k)$  disponible en conservant le modèle de dynamique initialement choisi; soit, selon le niveau de  $\hat{\mathbf{u}}(k)$ , on peut changer de modèle de dynamique pour améliorer le pistage (exemple du pistage d'une cible en vol MRU qui soudainement se met à virer). Ce principe est celui du **filtre à dimension variable (VSD)** proposé en [BSB82].

- **la commande inconnue mais aléatoire :** 2 approches sont possibles.

1. on peut supposer que la commande a un niveau qui peut varier de façon continue et l'on cherchera à augmenter (adapter) convenablement le processus de bruit d'état  $\mathbf{v}(k)$  de l'équation de dynamique. On adapte la matrice  $\mathbf{Q}(k)$  au processus de bruit d'état qui englobe la manœuvre.

En général, cependant les manœuvres n'ont rien d'aléatoire puisqu'elles ont un but bien précis qui dépend de l'objectif de la mission de l'engin et de son pilote ...

2. on suppose que la commande ne peut prendre **qu'un nombre fini (et discret) de valeurs possibles** (les modes de manœuvre  $\mathbf{m}(k)$ ) parmi un ensemble fini  $\mathbb{M}(k)$ . Chaque mode est caractérisé par une équation de dynamique particulière (mouvement MRU, à accélération constante, ballistique, virage coordonné, etc) et/ou avec certains niveaux de bruits d'état. Les techniques d'estimation utilisées dans cette approche sont des **techniques d'estimation hybrides** car l'on cherche à estimer à la fois l'état des cibles (variable continue  $\mathbf{x}$ ) et la probabilité d'occurrence des modes ( $\mathbf{m}(k)$  qui sont des variables discrètes). Parmi les méthodes de ce type, on citera la méthode statique **MM** (multi-modèles) [TH79, Tug82] qui ne prend pas en compte la possibilité de basculement possible d'un mode à l'autre [Mag65, Tho73, MG77, MVM79, MVM80]. La méthode optimale du **FHT (Full Hypothesis Tree)** inexploitable en temps réel. Les méthodes sous-optimales de type **GPB (Generalized Pseudo Bayesian)** [AF70, JG71a, JG71b, CA78] et **IMM (Interacting Multiple Model)** [Blo90].

Dans la suite de ce cours, nous présentons en détail uniquement l'approche par IMM car celle-ci supplante de loin les autres méthodes antérieurement développées jusqu'alors.

## 7.2 Estimation hybride par modèles multiples

L'approche la plus naturelle pour l'estimation des systèmes hybrides reste celle basée sur la **notion de modèles multiples**. Dans cette approche, un ensemble de modèles  $\mathbb{M}(k)$  est défini soit une fois pour toute **a priori**  $\mathbb{M}(k) \equiv \mathbb{M}, \forall k$  (on parle alors de **structure fixe de modèles**) afin de couvrir tous (on l'espère tout du moins) les modes possibles du système observé, ou bien de **manière adaptative** [LBS96a, Li97c]. Pour un panorama des méthodes, on pourra se référer à [Li96]. L'estimée de l'état hybride est obtenue par la combinaison judicieuse des estimées possibles conditionnellement aux hypothèses concernant la validité des modes courants.

### 7.2.1 Forme de l'estimateur optimal - Algorithme FHT

L'estimée optimale  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  de l'état  $\mathbf{x}(k)$  et sa matrice de covariance associée  $\mathbf{P}(k|k)$  peuvent en théorie être obtenus en minimisant la variance de l'erreur d'estimation. En considérant **toutes les combinaisons** de changement de modes possibles de l'instant initial jusqu'à l'instant courant  $k$ , on aboutit alors aux relations classiques suivantes [BSF88] :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_i \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) P\{H_i^k | Z^k\}} \quad (7.2)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(k|k) = \sum_i \{\mathbf{P}_i(k|k) + [\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_i(k|k)][\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_i(k|k)]'\} P\{H_i^k | Z^k\}} \quad (7.3)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}_i(k|k)$  représente l'estimée optimale au temps  $k$  conditionnellement à une historique possible de changement de modes notée  $H_i^k$  couvrant la période allant du temps initial au temps courant  $k$ .

Il est clair que cet estimateur optimal nécessite **le stockage de toutes les séquences possibles de modes**. Il faut bien voir que le nombre de séquences possibles  $N(k)$  croît exponentiellement avec le temps. En effet, si l'on note  $n(t)$  le nombre de modes possibles à un instant  $t$  donné, le nombre total  $N(k)$  de séquences possibles depuis l'instant initial jusqu'à l'instant  $k$  vaudra :

$$N(k) = n(1) \times n(2) \times \dots \times n(k)$$

Dans le cas particulier où  $\forall t > 0$ , on a  $n(t) \equiv n$  (**cas d'une structure à modèles multiple fixe**), on obtient :

$$\boxed{N(k) = n^k} \quad (7.4)$$

Cette remarque importante montre que l'estimateur optimal, appelé parfois estimateur **FHT** (Full-Hypothesis-Tree), est **inutilisable en temps réel**. Dans la littérature, certaines méthodes sous-optimales de management de l'arbre de séquences de modes ont été proposées parmi lesquelles on retiendra **l'algorithme de Viterbi** [Vit67], l'algorithme **GPB** (Generalized Pseudo Bayesian) de Ackerson et Fu [AF70], et l'algorithme **IMM** (Interacting Multiple Model) de H.A.P. Blom [Blo90]. Il faut savoir que L'IMM présente des performances équivalentes à un GPB d'ordre 2 ou la méthode de Viterbi pour un coût de calcul beaucoup plus restreint. C'est donc ce type d'algorithme que nous présentons ici uniquement. Une présentation des autres méthodes peut être trouvée en [BSL93].

### 7.2.2 Algorithmes MM sous-optimaux

Pour rendre les algorithmes à modèles multiples (MM) utilisables en temps réel, on doit impérativement **limiter la croissance exponentielle du nombre d'historiques possibles**. L'idée consiste, soit à fusionner (merging) les historiques de modes considérées comme similaires au sens d'un certain critère, ou bien à éliminer toutes les historiques (pruning) dont la vraisemblance, par exemple, reste en dessous d'un certain seuil (paramètre de réglage). Une autre technique consiste à ne conserver que les  $N$  historiques ayant les plus fortes vraisemblances. Quelle que soit l'approche adoptée, on cherche toujours à avoir un nombre limité de termes intervenant dans les sommes (7.2) et (7.3). Il va de soi, que l'estimateur  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  ainsi construit perd son caractère d'optimalité mais au bénéfice d'une implémentation en temps réel. Selon les techniques de gestion des historiques (pruning, merging) différents algorithmes sont apparus dans la littérature des méthodes non-FHT à modèles multiples (Viterbi, RSA, GPB, IMM, etc).

Nous focalisons dans la suite notre attention sur l'IMM : la méthode la plus performante sur le *marché* des algorithmes actuellement ... Quelques rappels s'imposent avant la présentation de l'IMM.

### 7.2.3 Chaînes de Markov discrètes

On rappelle que l'historique ou séquence  $H^k$  représente la séquence d'états du processus markovien de changement de modes  $\mathbf{m}(k)$  depuis l'instant initial jusqu'à l'instant  $k$ . La notation  $\mathbf{m}(k)$  au lieu de  $m(k)$  est ici utilisée car dans le cas général le paramètre décrivant le mode ne sera pas uniquement un scalaire, mais plutôt un vecteur de valeurs discrètes qui décrira à la fois le mode principal (lié au centre de gravité), le mode propre (lié au mouvement de l'engin par rapport à son centre de gravité) et éventuellement un mode de forme (lié à la forme courante de la cible). Cette notation prend toute son importance dans le cas de la **poursuite de cibles étendues** [Dez98, DL98]. Nous pourrons ici assimiler  $\mathbf{m}(k)$  à un paramètre scalaire car nous **considérons ici les cibles comme ponctuelles**.

$$H^k \triangleq \{\mathbf{m}(1), \mathbf{m}(2), \dots, \mathbf{m}(k)\} \quad (7.5)$$

Une séquence de modes limitée dans le passé de l'instant  $l$  à l'instant  $k$ , sera notée :

$$H^{l,k} \triangleq \{\mathbf{m}(l), \mathbf{m}(l+1), \dots, \mathbf{m}(k)\} \quad (7.6)$$

L'équation d'évolution du processus markovien s'écrit :

$$p(\mathbf{m}(k)|H^{k-1}) = p(\mathbf{m}(k)|\mathbf{m}(k-1)) \quad (7.7)$$

On suppose que ces probabilités de transitions sont connues et décrites au travers d'une **matrice de transition** que l'on se fixera a priori.

Dans le cas **d'une association parfaite des mesures** (pas d'incertitude d'assигnation des mesures aux pistes), l'équation de mesure est décrite par :

$$p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}, H^k) = p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}(k)) \quad (7.8)$$

Cette égalité provient du fait que par hypothèse sur le bruit de mesure (bruit de mesure blanc), la mesure sera sans mémoire et ne dépendra que du dernier mode  $\mathbf{m}(k)$  de la séquence  $H^k$ .

Les principales approches envisageables pour estimer le mode courant  $\mathbf{m}(k)$  d'un système hybride sont les suivantes :

#### 1. Méthode du Maximum a posteriori (MAP)

Pour tous les modes possibles, on calcule les probabilités  $p(\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k)$  puis on choisit la valeur qui

réalise le maximum de cette distribution. En pratique le calcul du MAP est relativement simple car le calcul récursif de  $p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}(k))$  est réalisé par deux étapes successives (la prédition par équation de Chapman-Kolmogorov, puis la mise à jour en tenant compte de la mesure).

## 2. Méthode de Viterbi (VA)

L'idée ici consiste à déterminer la séquence  $\hat{H}^k$  représentant le maximum de  $p(H^k|\mathbf{Z}^k)$  et de choisir pour  $\hat{\mathbf{m}}(k)$  le dernier élément de  $\hat{H}^k$ . Pour cela, on pourra utiliser l'algorithme de Viterbi décrit en [AIT91].

## 3. Méthode d'estimation à variance minimale (MMSE)

Cette méthode classique n'est malheureusement pas envisageable ici, car il faudrait réaliser des combinaisons linéaires à coefficients réels d'éléments appartenant à  $\text{IM}(k)$ , ce qui n'est pas possible. En effet, l'estimée serait alors donnée par :

$$\hat{\mathbf{m}}(k) = E[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k] = \sum_{\mathbf{m}(k) \in \text{IM}(k)} \mathbf{m}(k) p(\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k) \quad (7.9)$$

Un des plus simples **systèmes stochastiques hybrides** (SSH) est le **système linéaire à saut**, designé souvent par l'acronyme **JLS** (pour **Jump Linear System**). Ce type de système (à structure fixe de modèles) est décrit dans [Mar90] et [Blo90]. Les équations qui le régissent sont les suivantes :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}[k-1, \mathbf{m}(k)]\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}[k-1, \mathbf{m}(k)]\mathbf{v}[k-1, \mathbf{m}(k)] \quad (7.10)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}[k-1, \mathbf{m}(k)]\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}[k, \mathbf{m}(k)] \quad (7.11)$$

La transition d'un mode à l'autre est supposée être gouvernée par **une chaîne de Markov homogène du premier ordre** selon les probabilités :

$$P\{\mathbf{m}_j(k+1)|\mathbf{m}_i(k)\} = \pi_{ij} \quad \forall \mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j \in \text{IM} \quad (7.12)$$

On admet de plus que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- les bruits  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des bruits blancs gaussiens ;
- l'état initial  $\mathbf{x}(0)$  est gaussien de moyenne  $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$  et de covariance  $\mathbf{P}(0|0)$  ;
- $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{x}(0)$  sont non corrélés.

### 7.2.4 Estimation par IMM à structure fixe de modèles (1984)

Comme on vient de le voir, l'estimateur FHT **ne peut être mis en œuvre en temps réel** à cause du nombre exponentiellement croissant d'historiques possibles nécessaire. Pour limiter ce nombre, la méthode IMM classique (c.à.d. d'ordre 1) développée par H.A.P. Blom [Blo84a, Blo84d, Blo86, BBS88,

Blo90, Bar90b] ne considère **uniquement que les modèles courants**  $\mathbf{m}_J(k)$  possibles et non toutes les historiques possibles pour construire un estimateur récursif sous-optimal (i.e. non-FHT)  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  exploitable en temps réel. L'IMM d'ordre deux (IMM2) plus compliqué à mettre en œuvre n'est pas considéré ici pour simplifier la présentation. On renvoie le lecteur à [BWH93] pour une présentation détaillée de l'IMM2.

La base de l'IMM tient dans la façon de mettre à jour **la densité a posteriori**  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k]$  en partant de l'expression de la densité a priori  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}]$  connue à l'instant antérieur  $k-1$  et de la mesure courante  $\mathbf{z}(k)$ . L'estimée optimale cherchée  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  (et sa covariance associée  $\mathbf{P}(k|k)$ ) seront données par les 2 premiers moments de  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k]$ . La démarche utilisée s'appuie implicitement sur la mise à jour de la distribution de l'état hybride selon les deux étapes suivantes :

$$\boxed{p[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{m}(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}] \xrightarrow{\textcircled{1}} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}] \xrightarrow{\textcircled{2}} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k]} \quad (7.13)$$

Si l'on suppose l'état hybride  $(\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k))$  **markovien**, la transition  $\textcircled{1}$  (étape de prédiction) est obtenue par l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}] &= \int \sum_i p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k), \mathbf{x}(k-1), \mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}] d\mathbf{x}(k-1) \\ &= \int \sum_i p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k)|\mathbf{x}(k-1), \mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \\ &\quad \cdot p[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}] d\mathbf{x}(k-1) \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{m}(k)$ ,  $\mathbf{v}(k)$  et  $\mathbf{w}(k)$  sont **indépendants**, l'étape de mise à jour  $\textcircled{2}$  de la distribution conjointe est obtenue par la formule de Bayes :

$$p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k] = \frac{p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1})p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}]}{p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{Z}^{k-1})}$$

La densité marginale a posteriori cherchée  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k)$  ainsi que la probabilité a posteriori de chaque modèle  $\mathbf{m}_J(k)$  sont données par les relations :

$$\boxed{p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k) = \sum_j p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^k] \equiv \sum_j p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k) P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^k\}} \quad (7.14)$$

$$\boxed{P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^k\} = \int p[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^k] d\mathbf{x}(k)} \quad (7.15)$$

On détaille maintenant les différentes étapes nécessaires aux calculs des expressions intervenant dans (7.45) et (7.15) :

- **Concernant l'état du système** : on doit réaliser les étapes suivantes :

### 1. Mixage

$$p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \quad (7.16)$$

### 2. Prédiction

$$p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \quad (7.17)$$

### 3. Mise à jour

$$p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^k] \quad (7.18)$$

- **Concernant les modes du système :** on doit réaliser les étapes suivantes

### 1. Prédiction

$$P[\mathbf{m}(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow P[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}] \quad (7.19)$$

### 2. Mise à jour

$$P[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow P[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k] \quad (7.20)$$

**Mixage de l'état**  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}]$

Le calcul de la densité obtenue à l'issue de l'étape de mixage de l'état (relation (7.16)) se fait en introduisant tous les modes possibles à l'instant  $k-1$  et utilisant le théorème des probabilités totales selon :

$$p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] = \sum_i p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] P\{\mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\}$$

Comme  $\mathbf{m}_j(k)$  est conditionnellement indépendant de  $\mathbf{x}(k-1)$  sachant  $\mathbf{m}_i(k-1)$ , on a  $\forall j$  :

$$\boxed{p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \equiv p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}]} \quad (7.21)$$

D'autre part, puisque  $\mathbf{m}_j(k)$  est conditionnellement indépendant de  $\mathbf{Z}^{k-1}$  sachant  $\mathbf{m}_i(k-1)$ , on a

$$\boxed{P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}\} = P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{m}_i(k-1)\} \equiv \pi_{ij}} \quad (7.22)$$

Ceci permet d'exprimer le second terme de la somme précédente, à savoir :

$$\begin{aligned} \mu_{ij}(k-1|k-1) &\triangleq P\{\mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{P\{\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\}}{P\{\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\}} \\ &= \underbrace{\frac{P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}\}}{P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\}}}_{\mu_j^-(k)} \underbrace{\frac{P\{\mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}\}}{P\{\mathbf{m}_i(k-1)\}}}_{\mu_i(k-1)} \end{aligned}$$

Soit finalement,

$$\boxed{\mu_{i|j}(k-1|k-1) = \frac{1}{\mu_j^-(k)} \pi_{ij} \mu_i(k-1)} \quad (7.23)$$

avec la constante de normalisation  $\mu_j^-(k)$  donnée par

$$\mu_j^-(k) = \sum_i \pi_{ij} \mu_i(k-1) \quad (7.24)$$

En utilisant ces relations, il vient finalement

$$\boxed{p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] = \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1) p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}]} \quad (7.25)$$

On voit donc que la densité  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}]$  est constituée d'un **mélange (mixage) pondéré** des densités  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}]$ .

Pour obtenir la formulation simple du filtre IMM, on **admet que les densités constituant le mélange sont gaussiennes**; c'est à dire :

$$\boxed{p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \approx \mathcal{N}[\mathbf{x}(k-1); \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1), \mathbf{P}_i(k-1|k-1)]}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) &= E[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \\ \mathbf{P}_i(k-1|k-1) &= E[[\mathbf{x}(k-1) - \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1)][\mathbf{x}(k-1) - \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1)]'|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \end{aligned}$$

Ces quantités seront obtenues par un **filtre de Kalman adapté à chacun des modes  $\mathbf{m}_i$**  envisagés (cf. paragraphe suivant).

Sous cette hypothèse, les densités  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}]$  seront des **mixtures de gaussiennes** dont les 2 moments seront donnés par [BSF88] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1) &= \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1) \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) \\ \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1) &= \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1) [\mathbf{P}_i(k-1|k-1) \\ &\quad + [\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) - \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)][\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) - \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)]'] \end{aligned}$$

A ce stade, **on assimile chaque mixture gaussienne  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}]$  en fait à une densité gaussienne de moyenne  $\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)$  et de covariance  $\mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)$** . En d'autres termes, on admet l'approximation :

$$\boxed{p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \approx \mathcal{N}[\mathbf{x}(k-1); \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1), \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)]} \quad (7.26)$$

**Prédiction de l'état**  $p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^k]$

La densité conditionnelle de la prédiction  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_J(k), \mathbf{Z}^{k-1}]$  est obtenue par l'équation de **Chapman-Kolmogorov** :

$$p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] = \int p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1), \mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] p[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] d\mathbf{x}(k-1)$$

Compte tenu de l'**hypothèse gaussienne**, sur  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1), \mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}]$ , on obtient

$$\boxed{p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \approx \mathcal{N}[\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1), \mathbf{P}_j(k|k-1)]} \quad (7.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) &= \mathbf{F}_j(k-1)\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1) + \mathbf{G}_j(k-1)\bar{\mathbf{v}}_j(k-1) \\ \mathbf{P}_j(k|k-1) &= \mathbf{F}_j(k-1)\mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)\mathbf{F}_j(k-1)' + \mathbf{G}_j(k-1)\mathbf{Q}_j(k-1)\mathbf{G}_j(k-1)' \end{aligned}$$

**Mise à jour de l'état**  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}(k), \mathbf{Z}^k]$

La mise à jour de l'état conditionnellement à un mode courant (relation (7.18)) est obtenue par la formule de Bayes suivante :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k) &= p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{z}(k), \mathbf{Z}^{k-1}] \\ &= \frac{1}{c_j} p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}) \end{aligned} \quad (7.28)$$

où  $c_j$  est une constante de normalisation qui vaut :

$$c_j = p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) = \int p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}) d\mathbf{x}(k) \quad (7.29)$$

La relation (7.28) exprime en fait un cycle de mise à jour du filtre d'estimation **adapté au mode courant**  $\mathbf{m}_j(k)$  partant de la densité conditionnelle prédite  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1})$  et de la densité conditionnelle de la mesure  $\mathbf{z}(k)$ . Nous exprimons maintenant ces densités.

**Expression de**  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1})$

La densité  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1})$  peut être exprimée comme une **mixture pondérée de densités** que l'on approximera par **une densité gaussienne** en adaptant le premier et le deuxième moment statistique [BSF88]. En d'autres termes, on écrit

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}) = \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1) p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1})$$

avec

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}) &\approx p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1), \mathbf{P}_i(k-1|k-1)) \\ &= \mathcal{N}[\mathbf{x}(k); E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1), \mathbf{P}_i(k-1|k-1)], Cov[\mathbf{x}(k)|\cdot]] \end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}) &= \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1) \mu_{i|j}(k-1|k-1) \mathcal{N}[\mathbf{x}(k); E[], cov[.]] \\ &\approx \mathcal{N}[\mathbf{x}(k); \sum_i E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1)] \mu_{i|j}(k-1|k-1), Cov[.]] \\ &= \mathcal{N}[\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1), \mathbf{P}_j(k|k-1)] \end{aligned}$$

#### Expression de $p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1})$

La densité  $p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1})$  intervenant dans (7.28) est la densité de probabilité de la mesure conditionnellement au modèle  $m_j(k)$  et à l'état  $\mathbf{x}(k)$ . Sous l'hypothèse gaussienne et pour un modèle linéaire à saut markovien (ayant un bruit de mesure  $\mathbf{w}_j(k)$  supposé ici à moyenne nulle  $\bar{\mathbf{w}}_j(k) = 0$ ), cette densité s'écrit

$$p(\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{Z}^{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \mathbf{H}_j(k)\mathbf{x}_j(k), \mathbf{R}_j(k))$$

Par ailleurs, compte tenu de l'expression précédente de la densité  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1})$ , la quantité  $c_j$  va s'écrire

$$c_j = \int \mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \mathbf{H}_j(k)\mathbf{x}_j(k), \mathbf{R}_j(k)) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1), \mathbf{P}_j(k|k-1)) \quad (7.30)$$

Soit encore, compte tenu des propriétés des variables aléatoires gaussiennes (cf p 107 de [Gué94])

$$c_j = \mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1), \mathbf{S}_j(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{n_z/2} \sqrt{|\mathbf{S}_j(k)|}} \exp[-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}_j(k)' \mathbf{S}_j^{-1}(k) \tilde{\mathbf{z}}_j(k)] \quad (7.31)$$

avec

$$\hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1) = \mathbf{H}_j(k)\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) \quad (7.32)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_j(k) \triangleq \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1) \quad (7.33)$$

$$\mathbf{S}_j(k) = \mathbf{H}_j(k)\mathbf{P}_j(k|k-1)\mathbf{H}_j(k)' + \mathbf{R}_j(k) \quad (7.34)$$

**Expression de  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k)$** 

La densité **conditionnelle** de mise à jour cherchée  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k)$  s'exprime donc

$$\boxed{p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \mathbf{H}_j(k)\mathbf{x}_j(k), \mathbf{R}_j(k))\mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1), \mathbf{P}_j(k|k-1))}{\mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1), \mathbf{S}_j(k))}} \quad (7.35)$$

Compte tenu des lois gaussiennes (cf annexe B de [Gué94]), on aura finalement un filtre de Kalman adapté au mode  $\mathbf{m}_j$ ; autrement dit

$$\boxed{p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}_j(k|k), \mathbf{P}_j(k|k))} \quad (7.36)$$

avec

$$\mathbf{K}_j(k) = \mathbf{P}_j(k|k-1)\mathbf{H}_j(k)'\mathbf{S}_j^{-1}(k) \quad (7.37)$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) + \mathbf{K}_j(k)[\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1)]} \quad (7.38)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_j(k|k) = \mathbf{P}_j(k|k-1) - \mathbf{K}_j(k)\mathbf{S}_j(k)\mathbf{K}_j(k)'} \quad (7.39)$$

**Prédiction des modes  $P[\mathbf{m}(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow P[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}]$** 

En introduisant tous les modèles possibles à l'instant  $k-1$ , on voit que la probabilité a priori  $P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\}$  du mode  $\mathbf{m}_j(k)$  peut être obtenue par :

$$\mu_j^-(k) \triangleq P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\} \equiv \sum_i \underbrace{P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}\}}_{\pi_{ij}} \underbrace{P\{\mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{Z}^{k-1}\}}_{\mu_I(k-1)}$$

soit finalement,

$$\boxed{\mu_j^-(k) = \sum_i \pi_{ij} \mu_i(k-1)} \quad (7.40)$$

$\pi_{ij} \triangleq P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{m}_i(k-1), \mathbf{Z}^{k-1}\}$  est l'élément  $ij$  de la **matrice (supposée connue) de transition de Markov de changement de modes**.

**Mise à jour des modes**  $P[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^{k-1}] \dashrightarrow P[\mathbf{m}(k)|\mathbf{Z}^k]$

La mise à jour (7.20) de la probabilité de chaque modèle  $\mathbf{m}_j(k)$  possible se fait en utilisant la décomposition bayésienne :

$$\mu_j(k) \triangleq P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^k\} = P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{z}(k), \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{1}{c(k)} \underbrace{p\{\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\}}_{\Lambda_j(k)} \underbrace{P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\}}_{\mu_j^-(k)}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\mu_j(k) = \frac{1}{c(k)} \Lambda_j(k) \mu_j^-(k)} \quad (7.41)$$

avec

$$c(k) = \sum_j \Lambda_j(k) \mu_j^-(k) \quad (7.42)$$

$\Lambda_j(k)$  représente la **fonction de vraisemblance du modèle  $\mathbf{m}_j(k)$**  et  $\mu_j^-(k)$  est la **probabilité a priori** pour que le système soit dans le mode  $\mathbf{m}_j(k)$ . Cette probabilité est obtenue par (7.40). Si on suppose que l'information a priori  $\mathbf{Z}^{k-1}$  peut être **résumée dans les 2 premiers moments mixés**  $\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)$  et  $\mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)$ , alors on peut écrire :

$$\boxed{\Lambda_j(k) \approx p\{\mathbf{z}(k)|\mathbf{m}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1), \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)\}}$$

Avec **l'hypothèse supplémentaire de normalité**, on aboutit à :

$$\boxed{\Lambda_j(k) = \mathcal{N}[\mathbf{z}(k); \hat{\mathbf{z}}_j[k|k-1; \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)], \mathbf{S}_j[k; \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)]]}$$

Soit encore plus simplement,

$$\boxed{\Lambda_j(k) = \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_j(k); 0, \mathbf{S}_j(k)]} \quad (7.43)$$

où  $\tilde{\mathbf{z}}_j(k)$  est **l'innovation du filtre adapté au mode  $\mathbf{m}_j(k)$**  donnée par :

$$\boxed{\tilde{\mathbf{z}}_j(k) \triangleq \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}_j[\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)] = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}_j[k|k-1; \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)]} \quad (7.44)$$

$\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)$  est l'état prédit à partir de **l'état mixé**  $\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)$  et du mode  $\mathbf{m}_j(k)$ .  $\mathbf{S}_j(k) = \mathbf{S}_j[k; \mathbf{P}_j(k|k-1)] = \mathbf{S}_j[k; \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)]$  est la covariance de  $\tilde{\mathbf{z}}_j(k)$ .

## Reconstruction de l'estimée globale par combinaison

Pour reconstruire l'estimée globale  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ , on utilise la densité  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k)$  que l'on exprime comme le mélange des densités suivantes

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Z}^k) = \sum_j p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^k] \mu_j(k) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{P}(k|k)) \quad (7.45)$$

où la notation suivante a été adoptée

$$\boxed{\mu_j(k) \triangleq P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^k\}} \quad (7.46)$$

On approxime ce mélange par une nouvelle densité gaussienne en faisant coïncider les 2 premiers moments statistiques et on obtient

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \sum_j \mu_j(k) \hat{\mathbf{x}}_j(k|k) \\ \hat{\mathbf{P}}(k|k) &= \sum_j \mu_j(k) [\mathbf{P}_j(k|k) + [\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_j(k|k)][\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_j(k|k)]']\end{aligned}$$

### 7.2.5 Résumé d'un cycle complet de l'IMM standard

#### 1. Interaction

Probabilité du mode a priori et de mixage

$$\begin{aligned}\mu_j^-(k) &= P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{Z}^{k-1}\} = \sum_i \mu_i(k-1)\pi_{ij} \\ \mu_{i|j}(k-1|k-1) &= P\{\mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\} = \mu_i(k-1)\pi_{ij}/\mu_j^-(k)\end{aligned}$$

Initialisation des filtres par mixage

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1) &= \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1)\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) \\ \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1) &= \sum_i \mu_{i|j}(k-1|k-1)[\mathbf{P}_i(k-1|k-1) + \\ &\quad [\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) - \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)][\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) - \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)]']]\end{aligned}$$

#### 2. Filtrage conditionnellement aux modes

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) &= \mathbf{F}_j(k-1)\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1) + \mathbf{G}_j(k-1)\bar{\mathbf{v}}_j(k-1) \\ \mathbf{P}_j(k|k-1) &= \mathbf{F}_j(k-1)\mathbf{P}_j^0(k-1|k-1)\mathbf{F}_j(k-1)' + \mathbf{G}_j(k-1)\mathbf{Q}_j(k-1)\mathbf{G}_j(k-1)' \\ \hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1) &= \mathbf{H}_j(k)\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) + \bar{\mathbf{w}}_j(k) \\ \tilde{\mathbf{z}}_j(k) &= \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}_j(k|k-1) \\ \mathbf{S}_j(k) &= \mathbf{H}_j(k)\mathbf{P}_j(k|k-1)\mathbf{H}_j(k)' + \mathbf{R}_j(k) \\ \mathbf{K}_j(k) &= \mathbf{P}_j(k|k-1)\mathbf{H}_j(k)'\mathbf{S}_j^{-1}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}_j(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) + \mathbf{K}_j(k)\tilde{\mathbf{z}}_j(k) \\ \mathbf{P}_j(k|k) &= \mathbf{P}_j(k|k-1) - \mathbf{K}_j(k)\mathbf{S}_j(k)\mathbf{K}_j(k)'\end{aligned}$$

#### 3. Mise à jour des probabilités des modes

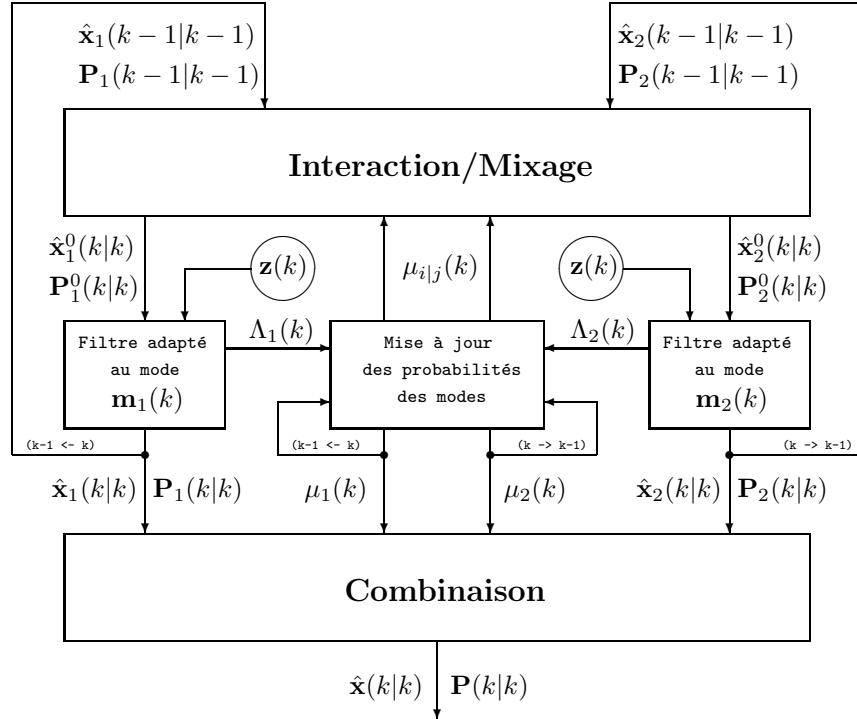
$$\begin{aligned}\Lambda_j(k) &= \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_j(k); 0, \mathbf{S}_j(k)] \\ \mu_j(k) &= \Lambda_j(k)\mu_j^-(k)/\sum_j \Lambda_j(k)\mu_j^-(k)\end{aligned}$$

#### 4. Combinaison

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \sum_j \mu_j(k)\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) \\ \hat{\mathbf{P}}(k|k) &= \sum_j \mu_j(k)[\mathbf{P}_j(k|k) + [\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_j(k|k)][\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_j(k|k)]']]\end{aligned}$$

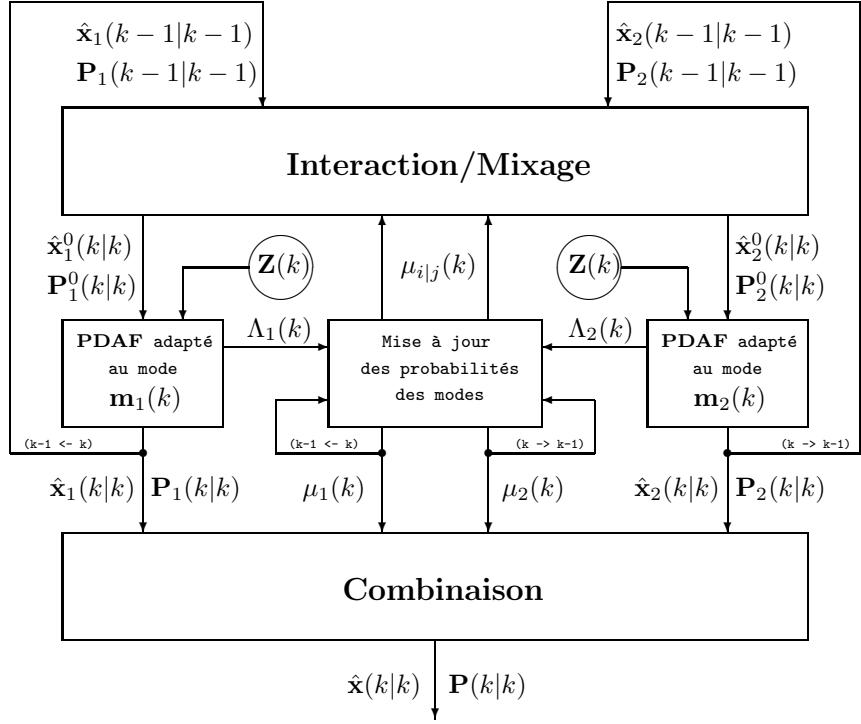
### 7.2.6 Schéma de principe d'un cycle de l'IMM standard

Le schéma de principe pour le cycle de l'IMM standard à 2 modèles est le suivant



### 7.2.7 IMM/PDAF pour le pistage de cible manœuvrante dans du clutter

L'algorithme IMM mono-senseur qui vient d'être présenté supposait l'association parfaite de la mesure avec la piste considérée et prenait en compte le basculement possible de l'état d'un modèle à un autre pour modéliser les phases de manœuvre de la cible. En environnement dégradé, on dispose de plusieurs mesures validées à chaque scan dont une, au plus, est supposée provenir de la cible. On a une incertitude sur l'origine des mesures. Pour pister une cible manœuvrante dans de telles conditions, l'idée consiste à mixer l'algorithme du PDAF pour traiter l'incertitude d'origine des mesures avec l'IMM pour traiter l'estimation du modèle de manœuvre. Il suffit alors de remplacer, dans le schéma précédent, les filtres de poursuite classiques (KF ou EKF) adaptés à chaque mode  $m_i(k)$  par des filtres PDAF adaptés aux différents modèles, selon le schéma de principe suivant, dans le cas de 2 modèles (l'extension au cas de  $N > 2$  modèles est immédiate) :



L'IMM/PDAF a d'abord été proposé en [Blo84a]. Des exemples détaillés de cet algorithme, basés sur le logiciel MultiDat développé par Bar-Shalom et ses étudiants, peuvent être trouvés en [BSL95]. Une information de reconnaissance/amplitude peut être prise en compte comme dans le PDAFAI et conduit à l'IMM/PDAFAI. Des extensions récentes ont également été proposées pour le pistage de cibles multiples par Farina et aboutissent à l'IMM/JPDPAF.

### 7.2.8 IMM/MSPDAF pour le pistage multi-senseurs de cible manœuvrante

Dans le cas de senseurs multiples, l'idée la plus simple consiste là encore combiner l'IMM avec un algorithme sous-optimal PDAF multi-senseurs (MSPDAF) déjà décrit précédemment et comme le propose la référence [HBS89]. On suppose avoir  $M$  modèles possibles et connues les probabilités de transitions  $\pi_{ij} = P\{\mathbf{m}_j(k)|\mathbf{m}_i(k-1)\}, \forall k$ . L'IMM/MSPDAF proposé consiste alors en les étapes suivantes :

#### 1. Mixage des estimées antérieures

$$\mu_{i|j}(k-1|k-1) = P\{\mathbf{m}_i(k-1)|\mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}\} = \frac{1}{\bar{c}_j} \pi_{ij} \mu_i(k-1) \quad i = 1, \dots, M \quad (7.47)$$

avec

$$\bar{c}_j \triangleq \sum_{i=1}^M \pi_{ij} \mu_i(k-1) \quad (7.48)$$

Connaissant les états antérieurs  $\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1)$  et  $\mathbf{P}_i(k-1|k-1)$ , on calcule les états mixés adaptés à chaque mode  $j = 1, \dots, M$

$$\hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1) = \sum_{i=1}^M \mu_{i|j}(k-1|k-1) \hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1) = & \sum_{i=1}^M \mu_{i|j}(k-1|k-1) \left[ \mathbf{P}_i(k-1|k-1) + \right. \\ & \left. [\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) - \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)][\hat{\mathbf{x}}_i(k-1|k-1) - \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1)]' \right] \end{aligned} \quad (7.50)$$

## 2. Prédiction des états et des mesures suivant chaque mode $j = 1, \dots, M$

$$\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) = \mathbf{F}_j(k) \hat{\mathbf{x}}_j^0(k-1|k-1) \quad (7.51)$$

$$\mathbf{P}_j(k|k-1) = \mathbf{F}_j(k) \mathbf{P}_j^0(k-1|k-1) \mathbf{F}_j(k)' + \mathbf{Q}_j(k) \quad (7.52)$$

## 3. Prédiction de la mesure pour le senseur $s_1$ adaptée aux modes $j = 1, \dots, M$

$$\hat{\mathbf{z}}_j^{s_1}(k|k-1) = \mathbf{h}^{s_1}[\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)] \quad (7.53)$$

et des covariances ( $\mathbf{H}^{s_1}$  étant la matrice jacobienne de  $\mathbf{h}^{s_1}[\cdot]$  - cf EKF)

$$\mathbf{S}_j^{s_1}(k) = \mathbf{H}^{s_1}(k) \mathbf{P}_j(k|k-1) \mathbf{H}^{s_1}(k)' + \mathbf{R}^{s_1}(k) \quad (7.54)$$

## 4. Validation des mesures du senseur $s_1$

Pour ce faire, **on doit utiliser la même fenêtre de validation pour tous les modes**. On prend donc la fenêtre de plus grande taille (ayant le plus grand volume  $V$  avec le seuil de validation  $\gamma$  choisi a priori. Autrement dit, on prendra

$$V^{s_1}(k) = V_{j^*}^{s_1}(k) = \max_j [\gamma \pi \sqrt{\mathbf{S}_j^{s_1}(k)}] \quad (7.55)$$

où  $j^*$  est l'indice du mode ayant la plus grande fenêtre de validation correspondante. Une fois cette fenêtre maximale déterminée, on valide les mesures par la procédure classique, c.à.d par

$$[\mathbf{z}(k)^{s_1} - \hat{\mathbf{z}}_{j^*}^{s_1}(k|k-1)]' \mathbf{S}_{j^*}^{s_1}(k) [\mathbf{z}(k)^{s_1} - \hat{\mathbf{z}}_{j^*}^{s_1}(k|k-1)] \leq \gamma \quad (7.56)$$

5. **Mise à jour de l'état de la cible** pour chaque mode par un PDAF appliqué aux mesures validées du senseur  $s_1$ . On obtient alors  $\hat{\mathbf{x}}_j^{s_1}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_j^{s_1}(k|k)$ .
6. **Prédiction de la mesure attendue pour chaque mode par le senseur  $s_2$ .**

$$\hat{\mathbf{z}}_j^{s_2}(k|k) = \mathbf{h}^{s_2}[\hat{\mathbf{x}}_j^{s_1}(k|k)] \quad (7.57)$$

et des covariances ( $\mathbf{H}^{s_2}$  étant la matrice jacobienne de  $\mathbf{h}^{s_2}[\cdot]$  - cf EKF)

$$\boxed{\mathbf{S}_j^{s_2}(k) = \mathbf{H}^{s_2}(k)\mathbf{P}_j^{s_1}(k|k)\mathbf{H}^{s_2}(k)' + \mathbf{R}^{s_2}(k)} \quad (7.58)$$

### 7. Validation des mesures du senseur $s_2$

Choisir la fenêtre de plus grande taille parmi les modes, i.e.

$$\boxed{V^{s_2}(k) = V_{j^*}^{s_2}(k) = \max_j [\gamma\pi\sqrt{\mathbf{S}_j^{s_2}(k)}]} \quad (7.59)$$

Une fois cette fenêtre maximale déterminée, on valide les mesures par la procédure classique, c.à.d par

$$\boxed{[\mathbf{z}(k)^{s_2} - \hat{\mathbf{z}}_{j^*}^{s_2}(k|k)]' \mathbf{S}_{j^*}^{s_2}(k) [\mathbf{z}(k)^{s_2} - \hat{\mathbf{z}}_{j^*}^{s_2}(k|k)] \leq \gamma} \quad (7.60)$$

8. **Mise à jour de l'état de la cible** pour chaque mode par un PDAF appliquée aux mesures validées du senseur  $s_2$ . On obtient alors  $\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) \equiv \hat{\mathbf{x}}_j^{s_2}(k|k)$  et  $\mathbf{P}_j(k|k) \equiv \mathbf{P}_j^{s_2}(k|k)$ .
9. **Mise à jour de la probabilité des modes** par

$$\boxed{\mu_j(k) = \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^M \pi_{ij} \mu_i(k-1)} \quad (7.61)$$

avec la vraisemblance  $\Lambda_j(k)$  de chaque mode  $\mathbf{m}_j$  donnée par

$$\begin{aligned} \Lambda_j(k) &= p(\mathbf{Z}^{s_1}(k), \mathbf{Z}^{s_2}(k) | \mathbf{m}_j(k), m_k^{s_1}, m_k^{s_2}, \mathbf{Z}^{s_1,k-1}, \mathbf{Z}^{s_2,k-1}) \\ &= p(\mathbf{Z}^{s_1}(k) | \mathbf{m}_j(k), m_k^{s_1}, \mathbf{Z}^{s_1,k-1}) p(\mathbf{Z}^{s_2}(k) | \mathbf{m}_j(k), m_k^{s_2}, \mathbf{Z}^{s_2,k-1}) \\ &= \Lambda_j^{s_1}(k) \Lambda_j^{s_2}(k) \end{aligned}$$

avec (en notant  $\mathbf{Z}^{k-1}$  l'ensemble des données passées)

$$\begin{aligned} \Lambda_j^{s_1}(k) &= p(\mathbf{Z}^{s_1}(k) | \mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}) \\ &= V^{s_1}(k)^{-m_k^{s_1}} \gamma_0[m_k^{s_1}] + V^{s_1}(k)^{-m_k^{s_1}+1} \sum_{l=1}^{m_k^{s_1}} \frac{1}{P_g} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_{j,l}^{s_1}; 0; \mathbf{S}_j^{s_1}] \gamma_l[m_k^{s_1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j^{s_2}(k) &= p(\mathbf{Z}^{s_2}(k) | \mathbf{m}_j(k), \mathbf{Z}^{k-1}) \\ &= V^{s_2}(k)^{-m_k^{s_2}} \gamma_0[m_k^{s_2}] + V^{s_2}(k)^{-m_k^{s_2}+1} \sum_{l=1}^{m_k^{s_2}} \frac{1}{P_g} \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{z}}_{j,l}^{s_2}; 0; \mathbf{S}_j^{s_2}] \gamma_l[m_k^{s_2}] \end{aligned}$$

et les quantités  $\gamma_l$  données par (dans le cas d'un PDAF à version non paramétrique)

$$\gamma_l[m_k] = \begin{cases} \frac{1}{m_k} P_d P_g & l = 1, \dots, m_k \\ 1 - P_d P_g & l = 0 \end{cases} \quad (7.62)$$

10. Combinaison des estimées conditionnelles par

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \sum_{j=1}^M \mu_j(k) \hat{\mathbf{x}}_j(k|k) \quad (7.63)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = \sum_{j=1}^M \mu_j(k) [\mathbf{P}_j(k|k) + [\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)][\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]'] \quad (7.64)$$



# Chapitre 8

## Aide aux simulations

Nous donnons dans ce chapitre, certains points importants intervenant dans la mise en œuvre de simulations d'un système de pistage.

### 8.1 Test de consistance d'un filtre

#### 8.1.1 Dans les simulations

La consistance d'un filtre permet de s'assurer (en simulation) que l'erreur d'estimation vraie obtenue par le filtre  $\tilde{\mathbf{x}}(k) \triangleq \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)$  est compatible avec sa covariance estimée  $\mathbf{P}(k|k)$ . Pour tester la consistance, on définit l'erreur d'estimation normalisée au carré (**NEES - Normalized Estimation Error Squared**) par

$$\epsilon_{\mathbf{x}}(k) \triangleq [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]' \mathbf{P}(k|k)^{-1} [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)] \quad (8.1)$$

Sous les hypothèses de modèle linéaire/gaussien,  $\epsilon_{\mathbf{x}}(k)$  est une variable aléatoire qui suit un  $\chi^2_{n_x}$ . Pour tester la consistance, généralement on réalise  $N$  essais Monté-Carlo indépendants [Rub81, Rub86] pour un scénario donné et on peut calculer pour chaque instant  $k$ , la NEES moyenne qui vaut

$$\bar{\epsilon}_{\mathbf{x}}(k) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_{\mathbf{x}}^i(k) \quad (8.2)$$

Dans ces conditions, la quantité  $N\bar{\epsilon}_{\mathbf{x}}(k)$  doit suivre, en théorie, un  $\chi^2_{Nn_x}$  si le filtre est consistant. Le tracé de  $N\bar{\epsilon}_{\mathbf{x}}(k)$  et des bornes du  $\chi^2_{Nn_x}$  à 95 % (obtenues dans les tables statistiques) permet de juger de la qualité du filtre simulé. Souvent en simulations, on teste séparément la consistance sur les composantes de position et de vitesse en construisant  $\bar{\epsilon}_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_p^i(k)$  et  $\bar{\epsilon}_v(k) = \sum_{i=1}^N \epsilon_v^i(k)$  avec

$$\epsilon_p(k) \triangleq [\mathbf{x}_p(k) - \hat{\mathbf{x}}_p(k|k)]' \mathbf{P}_p(k|k)^{-1} [\mathbf{x}_p(k) - \hat{\mathbf{x}}_p(k|k)] \quad (8.3)$$

$$\epsilon_v(k) \triangleq [\mathbf{x}_v(k) - \hat{\mathbf{x}}_v(k|k)]' \mathbf{P}_v(k|k)^{-1} [\mathbf{x}_v(k) - \hat{\mathbf{x}}_v(k|k)] \quad (8.4)$$

où les indices  $p$  et  $v$  désignent les composantes relatives à la position et à la vitesse de la cible.

### 8.1.2 Dans les applications réelles

En pratique, on ne connaît évidemment pas l'état réel  $\mathbf{x}(k)$  de la cible pistée et par conséquent le test de consistance précédent ne peut être utilisé. Cependant, on dispose des innovations normalisées au carré (**NIS**) et le test peut être effectué sur ces informations disponibles. En effet, sous les hypothèses de modèle linéaire/gaussien et de consistance du filtre, la NIS définie par

$$\epsilon_{\mathbf{z}}(k) \triangleq [\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)]' \mathbf{S}(k)^{-1} [\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1)] \quad (8.5)$$

est en théorie une variable aléatoire qui suit un  $\chi^2_{n_z}$ . La NIS moyenne calculée sur  $N$  essais Monté-Carlo indépendants pour un scénario donné vaut alors

$$\bar{\epsilon}_{\mathbf{z}}(k) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_{\mathbf{z}}^i(k) \quad (8.6)$$

et la quantité  $N\bar{\epsilon}_{\mathbf{z}}(k)$  doit suivre en théorie un  $\chi^2_{Nn_z}$  quand le filtre est consistant. Le tracé de  $N\bar{\epsilon}_{\mathbf{z}}(k)$  et des bornes (à 95 ou 99 %) du  $\chi^2_{Nn_z}$  permet alors de mettre en évidence la consistance ou non du filtre simulé.

Un test supplémentaire sur la blancheur des innovations peut être également effectué. En effet, on sait que l'innovation [Kal60a, KB61] doit en théorie être un bruit blanc gaussien de covariance  $\mathbf{S}(k)$ . Il suffit donc de tester l'autocorrélation moyenne des innovations au cours du temps définie comme

$$\bar{\rho}(k, k+l) \triangleq \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{z}}^i(k)' \tilde{\mathbf{z}}^i(k+l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{z}}^i(k)' \tilde{\mathbf{z}}^i(k) \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{z}}^i(k+l)' \tilde{\mathbf{z}}^i(k+l)}} \quad (8.7)$$

Pour  $N$  suffisamment grand,  $\bar{\rho}(k, k+l)$  peut être considéré comme une variable aléatoire normale, centrée de variance  $1/N$  et l'hypothèse de blancheur de l'innovation sera acceptée si

$$\bar{\rho}(k, k+l) \in \frac{1}{\sqrt{N}}[-r, r] \quad (8.8)$$

où  $[-r, r]$  est l'intervalle de confiance d'une variable aléatoire  $u \sim \mathcal{N}(0, 1)$  tel que

$$P\{u \in [-r, r]\} = 1 - \alpha \quad (8.9)$$

En général on prend  $l = 1$  pour l'intervalle de corrélation et  $\alpha = 0.05$  ou  $0.01$ .

## 8.2 Initialisation des filtres pour les simulations

On rappelle ici la technique d'initialisation des filtres proposée par K.Birmiwal et Y. Bar-Shalom [BSB83]. Cette méthode permet d'assurer la bonne consistance de l'initialisation d'un filtre. On a ainsi une erreur d'estimation initiale cohérente avec la précision de mesure du senseur utilisé.

### 8.2.1 Initialisation des filtres locaux

Nous considérons ici le cas d'un système constitué de 2 senseurs uniquement. La généralisation au cas de  $N > 2$  senseurs est immédiate. L'initialisation d'un filtre local associé au senseur  $s_i$  ( $i = 1, 2$ ) utilise la mesure  $\mathbf{z}^{s_i}(0)$  et différence entre  $\mathbf{z}^{s_i}(0)$  et une mesure antérieure  $\mathbf{z}^{s_i}(-1)$ . En effet, considérons une seule coordonnée notée  $\xi$  ( $\xi = x$  ou  $\xi = y$  peu importe). La mesure de la position de la cible (relativement à la coordonnée choisie) est de la forme

$$z^{s_i}(k) = \xi(k) + w^{s_i}(k) \quad (8.10)$$

avec  $w^{s_i}(k) \sim \mathcal{N}(0, R_\xi^{s_i})$ . Si l'on dispose uniquement des mesures  $z^{s_i}(0)$  et  $z^{s_i}(-1)$ , alors l'estimation de la position et de la vitesse initiale de la cible (relativement à la coordonnée choisie) sera obtenue en prenant

$$\hat{\xi}(0|0) \equiv z^{s_i}(0) \quad (8.11)$$

$$\dot{\hat{\xi}}(0|0) \equiv \frac{z^{s_i}(0) - z^{s_i}(-1)}{T} \quad (8.12)$$

La covariance de l'erreur d'estimation initiale (pour la coordonnée  $\xi$ ) vaut alors

$$\mathbf{P}_\xi^{s_i}(0|0) = \begin{bmatrix} R_\xi^{s_i} & R_\xi^{s_i}/T \\ R_\xi^{s_i}/T & 2R_\xi^{s_i}/T^2 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Cette méthode est utilisée pour des coordonnées  $x$  et  $y$  afin d'obtenir l'estimation initiale du vecteur d'état  $\hat{\mathbf{x}}^{s_i}(0|0)$ . La matrice de covariance initiale du filtre local sera donc ( $\mathbf{O}$  étant la matrice nulle de dimension  $2 \times 2$ )

$$\mathbf{P}^{s_i}(0|0) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\xi=x}^{s_i}(0|0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{\xi=y}^{s_i}(0|0) \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

### 8.2.2 Initialisation d'un filtre centralisé

La méthode d'initialisation du filtre centralisé est faite de manière analogue mais en utilisant les mesures fusionnées des 2 senseurs  $\mathbf{z}(0)$  et  $\mathbf{z}(-1)$ . Ces mesures (relatives à une coordonnée  $\xi = x$  ou  $\xi = y$ ) sont obtenues par la pondération probabiliste des mesures des senseurs suivantes

$$z(0) = \left[ \frac{z^{s_1}(0)}{R_\xi^{s_1}} + \frac{z^{s_2}(0)}{R_\xi^{s_2}} \right] / C \quad (8.15)$$

$$z(-1) = \left[ \frac{z^{s_1}(-1)}{R_\xi^{s_1}} + \frac{z^{s_2}(-1)}{R_\xi^{s_2}} \right] / C \quad (8.16)$$

où la constante de normalisation  $C$  vaut

$$C = \frac{1}{R_\xi^{s_1}} + \frac{1}{R_\xi^{s_2}} \quad (8.17)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation fusionnée sera donnée par

$$\mathbf{P}(0|0) = \left[ [\mathbf{P}^{s_1}(0|0)]^{-1} + [\mathbf{P}^{s_2}(0|0)]^{-1} \right]^{-1} \quad (8.18)$$



# Chapitre 9

## Articles complémentaires (anglais)

### 9.1 Sur la génération des fausses alarmes

#### 9.1.1 Introduction

In the Monte Carlo simulations for the study and design of multitarget tracking algorithms [BSL93, BSL95], one needs frequently to generate false alarms (FA) in target validation gates defined by hyperellipsoids in measurement space computed from predicted target measurement and covariance of measurement innovation. False alarms are usually supposed to be independent and uniformly distributed in validation gates. During many years, the only inefficient method for generating such random points [BSF88] was to generate points in the minimal hypercube containing hyperellipsoid, and then sort and keep points which have been drawn in the hyperellipsoid based on a Mahalanobis distance test. This method which can be used whenever measurement space dimension and spatial density of false alarms are low, become very inefficient with the growth of FA spatial density and measurement space dimension because of the exponential rejection ratio which will be presented in section 2.3.

To overcome this major drawback, X.R. Li has been the first one (to the knowledge of the authors) to propose in 1992 [Li92b] a new algorithm, for generating points uniformly distributed in hyperellipsoids. In 1999, T.J. Ho and M. Farooq have however pointed out in [HF99] an obstacle in the practical use of Li's approach. They have then proposed an improved approach (referred here as HF algorithm ; HF standing for initials of authors) based on the orthogonal factorization of covariance matrix  $\mathbf{S}$  which avoids the indefinite number of iterations occurring within Li's algorithm. It is worthwhile to note that both approaches are based on computation of eigenvalues of matrix  $\mathbf{S}$ . This requirement is time consuming (high computation burden) when measurement space dimension becomes high.

In recent tracking developments, authors have tested intensively the HF algorithm and have discovered

the poor performances of this algorithm in term of spatial uniformity of random points generated in validation gates. A presentation of HF algorithm results will be detailed in the sequel. To overcome this major drawback, we propose a new fast, efficient and reliable algorithm for generating directly random points really uniformly distributed in hyperellipsoid which has the following two important properties : its complexity is  $O(n^3)$  ( $n$  being the measurement space dimension), and it does not require the computation of eigenvalues of matrix  $\mathbf{S}^{-1}$  and  $\mathbf{S}^{-1}$  itself as in previous existing methods. The new method proposed in this paper follows exactly the same assumptions as in [Li92b, HF99] : 1) the number of false measurements to be generated can be described by a suitable Poisson model ; 2) the false measurements are uniformly distributed in validation gate and are independent from scan to scan.

### 9.1.2 Preliminary

#### Validation of measurements

In target tracking, a validation gate  $V$  is used for eliminating sensor measurements which have small probability to belong to target. The measurements falling in the gate are said to be validated. Let  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  be the one step predicted state vector of a given target at time  $k$  and  $\mathbf{P}(k|k-1)$  the corresponding one step prediction covariance matrix of prediction error  $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ .  $\mathbf{x}(k)$  is the true (unknown) state vector of target at time  $k$  with dimension  $n_x$ . Given all information about the target up to  $k$ , we assume the probability density function (pdf)  $p(\mathbf{x})$  to be Gaussian with mean  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  and covariance  $\mathbf{P}(k|k-1)$ , that is  $p(\mathbf{x}(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{P}(k|k-1))$ . If the observation model  $\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k), \mathbf{w}(k)]$  is linear with additive zero-mean white Gaussian noise  $\mathbf{w}(k)$  with covariance  $\mathbf{R}(k)$  (i.e.  $\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$ ), then the innovation  $\tilde{\mathbf{z}}(k)$  (i.e. difference between measurement  $\mathbf{z}(k)$  and its prediction  $\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ ) is Gaussian with zero mean and covariance  $\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}'(k) + \mathbf{R}(k)$  where superscript ' denotes the transposition [BSL93]. Therefore, the pdf of true target measurement  $\mathbf{z}(k)$  is given by [Mui82]

$$p(\mathbf{z}(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{z}(k); \hat{\mathbf{z}}(k|k-1), \mathbf{S}(k)) = |2\pi\mathbf{S}(k)|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{z}(k)-\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)]'\mathbf{S}^{-1}(k)[\mathbf{z}(k)-\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)]} \quad (9.1)$$

or equivalently

$$p(\tilde{\mathbf{z}}(k)) = \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{z}}(k); \mathbf{0}, \mathbf{S}(k)) = |2\pi\mathbf{S}(k)|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}'(k)\mathbf{S}^{-1}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k)} \quad (9.2)$$

where  $\mathbf{z}(k)$  and  $\tilde{\mathbf{z}}(k)$  are vectors of dimension  $n_z$ ,  $\mathbf{S}(k)$  is a real symmetric and positive definite matrix of size  $n_z \times n_z$  and  $\mathbf{0}$  is the null vector  $([0, \dots, 0]')$  of size  $n_z$ . For notation convenience and brevity, the time index  $k$  is from now omitted in the following.

The density function (9.1) is constant whenever the quadratic form  $\epsilon \triangleq [\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]'\mathbf{S}^{-1}[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]$  in the exponent is, so that it is constant on the ellipsoid (called hyperellipsoid if  $n_z > 3$ ) defined by

$$[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]'\mathbf{S}^{-1}[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}] = \gamma \quad (9.3)$$

in  $\mathbb{R}^{n_z}$  for every  $\gamma > 0$ .  $\epsilon$  is called the Mahalanobis distance (or statistical distance) of the measurement  $\mathbf{z}$  with respect to its prediction  $\hat{\mathbf{z}}$  and is also referred as the NIS (Normalized Innovation Squared) in [BSL93]. This ellipsoid has center  $\hat{\mathbf{z}}$ , while  $\mathbf{S}$  determines its shape and orientation. Since innovation  $\tilde{\mathbf{z}}$  is a zero-mean Gaussian random variable with dimension  $n_z$ ,  $\epsilon$  is a  $\chi_{n_z}^2$  random variable (see theorem 1.4.1 of [Mui82] for proof). The pdf of  $\epsilon$  is then given by [Pap84] (p. 187)

$$p(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{for } \epsilon < 0 \\ \frac{1}{2^{n_z/2}\Gamma(n_z/2)}\epsilon^{\frac{1}{2}n_z-1}e^{-\frac{1}{2}\epsilon} & \text{for } \epsilon \geq 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

where  $\Gamma(\cdot)$  is the Gamma function defined for  $n > 0$  by  $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$  which follows the well known recurrence formulae  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$  and  $\Gamma(n+1) = n!$  if  $n = 0, 1, 2, \dots$ . One has also  $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$  and  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  and the following recurrence formula  $\Gamma(n) = \Gamma(n+1)/n$  holds when  $n < 0$ .

The validation (gating) of sensor measurements is obtained by choosing the threshold  $\gamma$  in such a way that the probability of true measurement falling in the validation gate  $\mathcal{V}(\gamma)$ , defined by

$$\mathcal{V}^{n_z}(\gamma) \triangleq \{\mathbf{z} : [\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]'\mathbf{S}^{-1}[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}] \leq \gamma\} \quad (9.5)$$

corresponds to a given gating probability  $P_g$ . The gating threshold  $\gamma$  and  $P_g$  are related through the following relationship

$$P_g = Pr\{\mathbf{z} \in \mathcal{V}^{n_z}(\gamma)\} = Pr\{\chi_{n_z}^2 \leq \gamma\} = \int_0^\gamma p(\epsilon)d\epsilon = \frac{1}{2^{n_z/2}\Gamma(n_z/2)} \int_0^\gamma \epsilon^{(n_z/2)-1}e^{-\epsilon/2}d\epsilon \quad (9.6)$$

Under Matlab programming environment (with statistics toolbox), the threshold  $\gamma$  can be easily computed using the command `gamma_threshold=chi2inv(Pg,nz)`. The square root  $g = \sqrt{\gamma}$  is usually called the “number of sigmas” (standard deviations) of the gate [BSF88]. The semi-axis of ellipsoid  $\mathcal{V}^{n_z}(\gamma)$  are the square roots of diagonal terms of  $\gamma\mathbf{S}$ . In summary the validation test  $T(\mathbf{z})$  is formally defined by

$$T(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{\mathbf{z}}'\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} \leq \gamma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} \text{ is validated} \\ 0 & \text{if } \tilde{\mathbf{z}}'\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} > \gamma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} \text{ is discarded} \end{cases} \quad (9.7)$$

In most of tracking applications, the observation of the targets is quite often difficult because of small target detection probabilities, bad conditions of observations due to cluttered environment and the limited quality of sensors of tracking system. In many practical tracking problems, one has therefore to take into account the presence of false measurements in the validation gate. For performance evaluation of realistic tracking algorithms based on Monte Carlo simulations, we are then frequently faced to the problem of generation of false alarms in validation gates. The usual assumption made is to consider the false alarms uniformly distributed in validation and independent from scan to scan. The development of our new algorithm for generating random points uniformly distributed in an hyperellipsoid allows herefater to efficiently solve this problem with a minimal computational burden.

### Volume of an hyperellipsoid

The volume  $V^{n_z}(\gamma)$  of an hyperellipsoid  $\mathcal{V}^{n_z}(\gamma)$  is defined by

$$V^{n_z}(\gamma) = \int_{\tilde{\mathbf{z}}' \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} \leq \gamma} d\tilde{\mathbf{z}} \quad (9.8)$$

Since  $\mathbf{S}$  is a real symmetric positive definite matrix, there exists [Mil64] a non singular linear transformation  $\mathbf{T}$  such that  $\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{T}'$ .  $\mathbf{T}$  is called square root of  $\mathbf{S}$ . Such decomposition is not unique but the Cholesky factorization allows to get easily an useful solution (in  $O(n^3)$  complexity) for  $\mathbf{S}^{1/2} = \mathbf{T}$ . Details about implementation of Cholesky factorization can be found in [BSL93] and [Bie77]. From this factorization, one has

$$\mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{T}\mathbf{T}')^{-1} = \mathbf{T}'^{-1}\mathbf{T}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (9.9)$$

In order to compute  $V^{n_z}(\gamma)$ , one has to introduce the following variable transformation  $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}$ . Then

$$\tilde{\mathbf{z}}'\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{T}\mathbf{y})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{y}) = \mathbf{y}(\mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{y} \quad (9.10)$$

It follows

$$V^{n_z}(\gamma) = \int_{\mathbf{y}'\mathbf{y} \leq \gamma} J d\mathbf{y} \quad (9.11)$$

where  $J = |\frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{y}}| = |\mathbf{T}|$  is the Jacobian of the transformation from the  $\tilde{\mathbf{z}}$  variable to the  $\mathbf{y}$  variable. Since  $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}'^{-1}\mathbf{T}^{-1}$ , then  $|\mathbf{S}^{-1}| = |\mathbf{T}|^{-2}$  and therefore  $J = |\mathbf{T}| = 1/\sqrt{|\mathbf{S}^{-1}|} = \sqrt{|\mathbf{S}(k)|}$ . By using the generalized spherical coordinate change of variable [Mil64], one has

$$V^{n_z}(\gamma) = \sqrt{|\mathbf{S}|} \int_0^{\sqrt{\gamma}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{n_z-2} r^{n_z-1} \left( \prod_{k=1}^{n_z-2} \sin^{n_z-1-k} \Phi_k \right) dr d\theta d\Phi_1 \dots d\Phi_{n_z-2} \quad (9.12)$$

which can be written as

$$V^{n_z}(\gamma) = \sqrt{|\mathbf{S}|} \left( \int_0^{\sqrt{\gamma}} r^{n_z-1} dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \prod_{k=1}^{n_z-2} \int_0^\pi \sin^{n_z-1-k} \Phi_k d\Phi_k \quad (9.13)$$

But

$$\int_0^\pi \sin^{n_z-1-k} \Phi_k d\Phi_k = B((n_z - k)/2, 1/2) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n_z - k))\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}(n_z - k + 1))} \quad (9.14)$$

where  $B(.,.)$  is the Beta function and  $\Gamma(.)$  the Gamma function and hence

$$\prod_{k=1}^{n_z-2} \int_0^\pi \sin^{n_z-1-k} \Phi_k d\Phi_k = \frac{\Gamma^{n_z-2}(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_z}{2})} = \frac{\pi^{(n_z-1)/2}}{\Gamma(\frac{n_z}{2})} \quad (9.15)$$

By reporting previous expressions into (9.13), one gets

$$V^{n_z}(\gamma) = \sqrt{|\mathbf{S}|} \times \frac{\gamma^{\frac{n_z}{2}}}{n_z} \times 2\pi \times \frac{\pi^{(n_z-1)/2}}{\Gamma(\frac{n_z}{2})} \quad (9.16)$$

which can be finally expressed as

$$V^{n_z}(\gamma) = \frac{(\pi\gamma)^{\frac{n_z}{2}} \sqrt{|\mathbf{S}|}}{\Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)} = c_{n_z} \sqrt{|\mathbf{S}|} \gamma^{n_z/2} \quad (9.17)$$

where coefficient  $c_{n_z}$  is given by

$$c_{n_z} = \frac{\pi^{n_z/2}}{\Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{\pi^{n_z/2}}{(\frac{n_z}{2})!} & \text{for } n_z \text{ even} \\ \frac{2^{n_z+1}(n_z+1/2)!}{(n_z+1)!} \pi^{(n_z-1)/2} & \text{for } n_z \text{ odd} \end{cases} \quad (9.18)$$

$c_{n_z}$  can be easily obtained under Matlab by using the command `cnz=pi^(nz/2)/gamma(1+nz/2)`.

The volume  $V_s^{n_z}(\gamma)$  of an  $n_z$ -dimensional hypersphere of radius  $\sqrt{\gamma}$  is therefore obtained by choosing  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  (i.e. the identity matrix of size  $n_z \times n_z$ ). One gets directly from (9.17)

$$V_s^{n_z}(\gamma) = \frac{(\pi\gamma)^{\frac{n_z}{2}}}{\Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)} \quad (9.19)$$

The volume  $V_c^{n_z}(\gamma)$  of minimal hypercube containing this hypersphere is given by

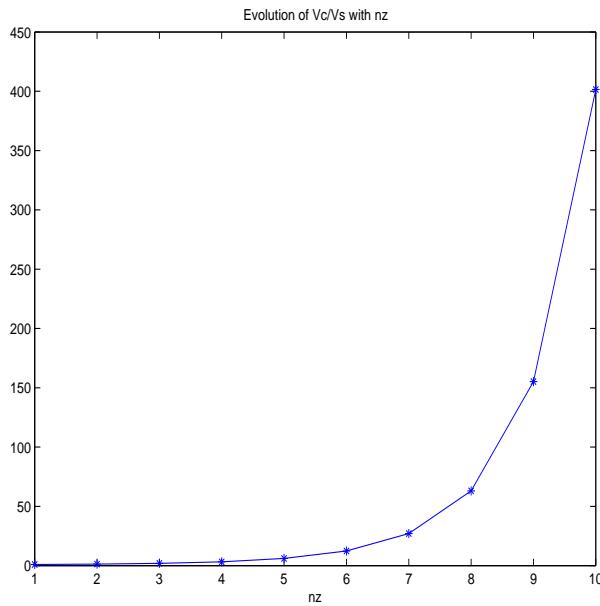
$$V_c^{n_z}(\gamma) = (2\sqrt{\gamma})^{n_z} \quad (9.20)$$

Hence, the ratio  $r = V_c^{n_z}(\gamma)/V_s^{n_z}(\gamma)$  is equal to  $(4/\pi)^{n_z/2}\Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)$ . By using Stirling development of  $\Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)$ , one can show for  $n_z$  sufficiently large that  $r$  is actually proportional to  $c = (4/\pi)^{n_z/2} \times \sqrt{\pi n_z} (n_z/2)^{n_z/2} e^{-n_z/2}$ . With elementary algebraic manipulation, the factor  $c$  can be expressed as  $c = \sqrt{\pi n_z} e^{n_z/2[\epsilon + \ln n_z]}$  with  $\epsilon = \ln(2) - \ln(\pi) - 1$ . This remark shows clearly the exponential increase of  $r$  with  $n_z$  as reported in following section.

### Evolution of $V_c^{n_z}/V_s^{n_z}$ with $n_z$

As already stated, during many years the generation of FA uniformly distributed in hyperellipsoid was based on the generation of FA uniformly distributed in the minimal hyperparallelepiped containing the validation gate. This method is still frequently used in many tracking simulators. When the dimension  $n_z$  of measurement space is low ( $n_z \leq 3$ ), this method is acceptable since the overcharge of computations is low. However, whenever  $n_z > 3$ , such method must really be bannished because of its strong overcharge of needless computations involved due to the exponential growth of the ratio  $r$  of hyperparallelepiped volume over hyperellipsoid volume with dimension.

We have plotted on figure 9.1 the growth of  $r = V_c^{n_z}/V_s^{n_z}$  with  $n_z$ . We can see the exponential growth of  $r$  which renders this method very inefficient for Monte-Carlo simulations since most of the time the method generates FA outside the hyperellipsoid rather than inside. For example for  $n_z = 7$ , if one wants to generate on average 100 FA in a given hyperellipsoid, the method requires to generate and to test on average 2700 FA in hyperparallelepiped. This is the major limitation of this method for Monte Carlo simulations. The new algorithm presented in this paper does not suffer of such limitation as it will be shown.

FIG. 9.1 – Evolution of  $V_c^{n_z}/V_s^{n_z}$  with  $n_z$ 

### 9.1.3 Limitations of HF algorithm for simulations

In this section we recall the HF algorithm proposed recently in [HF99] to generate random points uniformly distributed in validation gate. We point out some problems arising in simulations with this algorithm and show its practical limitations.

The HF algorithm consists of two stages. The first stage generates the Poisson-distributed number  $m_{FA}$  of false validated measurements in the hyperellipsoid under consideration. T. Ho and M. Farooq use the Poisson Random Generator (PRG) proposed in [BFS83]. This is only one issue possible among many other PRG available in the literature [Rub81, Dev86]. We will not discuss here about the quality of PRG used in stage I. Under Matlab,  $m_{FA}$  can be easily generated by using the simple instruction `m_FA=poissrnd(Lfa*V)` where  $V$  is the volume of hyperellipsoid given by (9.17) and `Lfa` is the spatial density of FA. The stage II generates false measurements supposed to be uniformly distributed in hyperellipsoid. This is accomplished as follows :

1. **Stage I** : Poisson Random Generator (PRG) to generate  $m_{FA}$
2. **Stage II** : Generation of  $m_{FA}$  random points uniformly distributed in gate

- Obtain the orthogonal matrix  $\mathbf{L}$  such that

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n_z-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{n_z} \end{bmatrix}$$

where each  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n_z$ , is an eigenvalue of the matrix  $\mathbf{S}^{-1}$  and  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n_z}$ .

- $l = 1$
- Repeat until  $l > m_{FA}$ 
  - Form the vector  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_{n_z}]$  where
    - $x_1 \sim \mathcal{U}[-\sqrt{\gamma/\lambda_1}, \sqrt{\gamma/\lambda_1}]$  and
    - for  $2 \leq i \leq n_z$ ,  $x_i \sim \mathcal{U}[-\sqrt{\tau_i/\lambda_i}, \sqrt{\tau_i/\lambda_i}]$
    - with  $\tau_i = \gamma - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_{i-1} x_{i-1}^2$
    - $\tilde{\mathbf{z}}(l) = \mathbf{L}\mathbf{x}$  (or equivalently  $\mathbf{z}(l) = \mathbf{L}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{z}}$ )
    - $l = l + 1$

where  $\gamma$  is the gating threshold and  $x \sim \mathcal{U}[a, b]$  means that  $x$  is a real random variable uniformly distributed in the interval  $[a, b]$ .  $\tilde{\mathbf{z}}(l)$  is the  $l$ -th innovation generated in the validation gate by the algorithm. The  $l$ -th false measurement is obtained by adding the center of the gate  $\hat{\mathbf{z}}$  to  $\tilde{\mathbf{z}}(l)$ ; i.e.  $\mathbf{z}(l) = \tilde{\mathbf{z}}(l) + \hat{\mathbf{z}}$ .

This algorithm outperforms Li's algorithm [Li92b] in term of computation cost because it does not require an indefinite number of iterations since no rejection test is necessary. The first drawback of this algorithm is its necessity to compute  $\mathbf{S}^{-1}$  and sort all eigenvalues of  $\mathbf{S}^{-1}$ . This first step of stage II can become actually very difficult to achieve with good precision as already reported in [Li92b]. Usually, this requires a lot of computations when dimension of measurement space becomes high. The second and most important drawback of HF algorithm is its reliability. Actually, the random points generated by HF algorithm appear to be not uniformly distributed in the gate (see following examples). All results reported here have been obtained with the generic Matlab routine (HFalgorithm.m) given in the appendix to convince the reader about these concluding remarks and results.

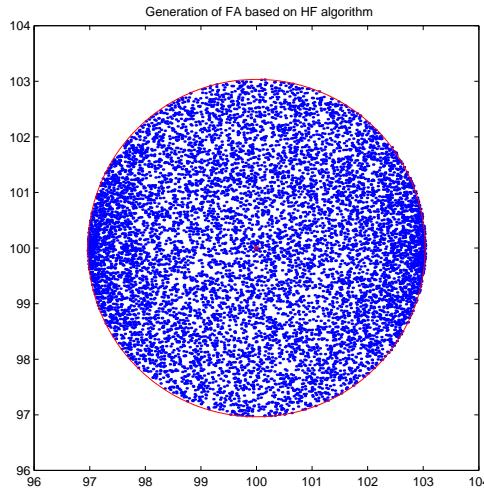
### Simulation results of random points generated by HF algorithm

We present here three results of random points generation obtained by HF algorithm in 2D measurement space ( $n_z = 2$ ). The gating probability  $P_g$  has been set to 0.99 which imposes the following gating threshold  $\gamma \approx 9.2103$ . The number of points generated in each validation gate has been arbitrary chosen to  $m_{FA} = 10000$ . The center  $\hat{\mathbf{z}}$  of gates has been taken at  $\hat{\mathbf{z}} = [100 \ 100]'$ . The simulation results presented

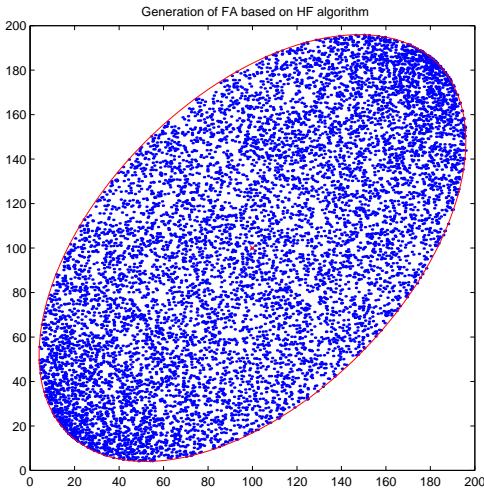
on figure 9.2 correspond to the three choices of covariance matrices for  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 500 \\ 500 & 1000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1000 & -500 \\ -500 & 1000 \end{bmatrix}$$

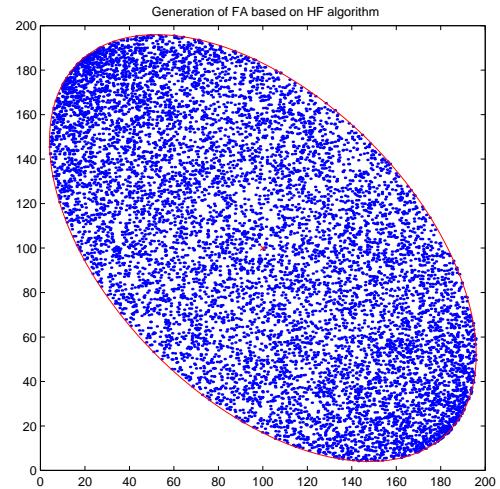
As we can easily observe, random points generated by HF algorithm cover the entire validation gates.



9.2.1 : Gate 1 :  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1$



9.2.2 : Gate 2 :  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_2$



9.2.3 : Gate 3 :  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_3$

FIG. 9.2 – Simulation results of HF algorithm ( $n_z = 2$ ,  $P_g = 0.99$  and  $m_{FA} = 10000$ )

However, simulation results show also that the false alarms are actually not exactly uniformly distributed in gates since there are two regions (darker areas on figures) in each gate which have a higher spatial density. This can be observed at left and right side of  $x$ -axis for gate 1 and at extremities of major axis of gates 2 and 3. This clearly indicates that practical use of HF algorithm is questionable. To overcome

this drawback, we propose a new efficient algorithm which is more reliable both in term of uniformity, in term of computation burden reduction and which does not require inversion of  $\mathbf{S}$ .

### 9.1.4 A new efficient algorithm

#### Theoretical development of the new algorithm

As in previous algorithms, our new algorithm consists of two stages. The first stage generates the Poisson-distributed number  $m_{FA}$  of false validated measurements in the hyperellipsoid under consideration with some existing PRG algorithms [Rub81, BFS83, Dev86]. In our Matlab simulations, we simply use the `poissrnd` function of Matlab statistics toolbox for stage I. The stage II, which generates  $m_{FA}$  false measurements uniformly distributed in hyperellipsoid, is now presented.

Consider the hyperellipsoid in  $\mathbb{R}^{n_z}$  defined by  $\mathcal{V}^{n_z}(\gamma) \triangleq \{\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n_z} : \tilde{\mathbf{z}}' \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} \leq \gamma\}$  where  $\mathbf{S}$  is a real symmetric positive definite matrix. This ellipsoid is equivalent, by denoting  $\mathbf{x} \triangleq \tilde{\mathbf{z}}/\sqrt{\gamma}$  to "unit" ellipsoid  $\mathcal{V}^{n_z}(1) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_z} : \mathbf{x}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}$ . As already recalled in section 2.2, since  $\mathbf{S}$  is a real symmetric positive definite matrix, there exists a square matrix  $\mathbf{T}$  such that  $\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{T}' \Leftrightarrow \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}'^{-1}\mathbf{T}^{-1}$ . Using the following linear transformation  $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ , one has  $\mathbf{x}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{y}' \mathbf{y}$ . Consequently, if  $\mathbf{y}$  is uniformly distributed in unit hypersphere  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_z} : \mathbf{y}' \mathbf{y} \leq 1\}$ , then  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$  will be uniformly distributed in "unit" ellipsoid  $\mathcal{V}^{n_z}(1)$  because of linear mapping between  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  and therefore  $\tilde{\mathbf{z}} = \sqrt{\gamma}\mathbf{x}$  will be uniformly distributed in validation gate  $\mathcal{V}^{n_z}(\gamma)$  which is what we are looking for. Hence, our problem is mathematically equivalent to the problem of generation of random points uniformly distributed in hypersphere  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$ . The solution of this problem is however well established in the milestone book of L. Devroye [Dev86] (Chapter V, section 4) and we present now the algorithm for generating points in  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$ .

We first recall basic definitions and theorems about radially symmetric random variables in  $\mathbb{R}^{n_z}$ . A random vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_z}$  is radially symmetric if  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  is distributed as  $\mathbf{u}$  for all orthonormal (rotation)  $n_z \times n_z$  matrices  $\mathbf{A}$ . If moreover  $Pr\{\mathbf{u} = \mathbf{0}\} = 0$ , then  $\mathbf{u}$  is said to be strictly radially symmetric.  $\mathbf{u}$  is uniformly distributed on unit hypersphere  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  when  $\mathbf{u}$  is radially symmetric with  $\|\mathbf{u}\| = 1$  ( $\|\cdot\|$  being the standard  $L_2$  norm). The density  $p(\mathbf{u})$  of any radially symmetric random variable  $\mathbf{u}$  is necessarily of the form  $g(\|\mathbf{u}\|)$  such that  $\int_0^\infty n_z V_s^{n_z} r^{n_z-1} g(r) dr = 1$  where  $V_s^{n_z} = (\pi)^{\frac{n_z}{2}} / \Gamma(\frac{n_z}{2} + 1)$  is the volume of unit hypersphere derived in (9.19).  $g(\cdot)$  is called the defining function of radial density  $p(\mathbf{u})$ .

The generation of random points uniformly distributed on  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  can be easily obtained via normal random variates as follows [Dev86] : each random point  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, \dots, m_{FA}$ ) is generated by drawing  $n_z$  iid normal random variates  $u_1, \dots, u_{n_z}$ , computing  $s = (u_1^2 + \dots + u_{n_z}^2)^{1/2}$  and returning  $\mathbf{u}_i = [u_1/s, \dots, u_{n_z}/s]'$ . The radial transformation theorem [Dev86], states that :

a) if  $\mathbf{u}$  is strictly radially symmetric in  $\mathbb{R}^{n_z}$  with a defining function  $g(\cdot)$ , then  $r = \|\mathbf{u}\|$  has density

$$p(r) = n_z V_s^{n_z} r^{n_z-1} g(r).$$

b) if  $\mathbf{u}$  is uniformly distributed on  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  and  $r$  is independent of  $\mathbf{u}$  and has pdf  $p(r)$  above, then  $r\mathbf{u}$  is strictly radially symmetric in  $\mathbb{R}^{n_z}$  with defining function  $g(r)$ .

A random vector is uniformly distributed in  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  when it is radially symmetric with defining function  $g(r) = 1/V_s^{n_z}(1)$  for  $0 \leq r \leq 1$  and  $g(r) = 0$  for  $r > 1$ .

We give here the proof of statement b) not provided in [Dev86]. If we consider a random vector  $\mathbf{u}$  uniformly distributed over  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  and a random variable  $r$  uniformly distributed in  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  with  $p(r) = n_z r^{n_z-1}$ , then we want to prove that  $\mathbf{z} = r\mathbf{u}$  is uniformly distributed in  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  which is equivalent to prove  $p(\mathbf{z}) = \frac{1}{V_s^{n_z}(1)} \mathbf{1}_{\mathcal{V}_s^{n_z}(1)}$  (where  $\mathbf{1}_a$  denotes the indicator function on set  $a$ ). Consider now the following pdf  $p(\mathbf{u}) = \frac{1}{T(\epsilon)} \mathbf{1}_{\mathcal{T}(\epsilon)}$  defined in hypertorus  $\mathcal{T}(\epsilon) \triangleq \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_z} : 1 - \epsilon \leq \|\mathbf{u}\| \leq 1 + \epsilon\}$  having volume (by setting  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  and  $\gamma^{1/2} = 1 + \epsilon$  in (9.17))  $T(\epsilon) = c_{n_z}[(1 + \epsilon)^{n_z} - (1 - \epsilon)^{n_z}] \simeq 2\epsilon n_z c_{n_z}$  when  $\epsilon \rightarrow 0$ . Now, consider the pdf of  $\mathbf{z}$  which can be expressed as  $p(\mathbf{z}) = \int_0^1 p(\mathbf{z} = r\mathbf{u}) p(r) dr$ . By taking into account previous expressions for  $p(\mathbf{u})$  and  $p(r)$ ,  $p(\mathbf{z})$  can equivalently be expressed as

$$p(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{T(\epsilon)} \int_0^1 \frac{n_z}{r^{n_z}} \mathbf{1}_{\mathcal{T}(\epsilon)} r^{n_z-1} dr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n_z}{T(\epsilon)} \int_0^1 \mathbf{1}_{1-\epsilon \leq \|\mathbf{u}\| \leq 1+\epsilon} \frac{1}{r} dr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n_z}{T(\epsilon)} \int_{\frac{\|\mathbf{z}\|}{1+\epsilon}}^{\frac{\|\mathbf{z}\|}{1-\epsilon}} \frac{1}{r} dr \times \mathbf{1}_{\|\mathbf{u}\| \leq 1}$$

by integration, one gets

$$p(\mathbf{z}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n_z}{T(\epsilon)} \log\left[\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right] \times \mathbf{1}_{\|\mathbf{u}\| \leq 1} \simeq \frac{n_z}{2\epsilon n_z c_{n_z}} 2\epsilon \times \mathbf{1}_{\|\mathbf{u}\| \leq 1} = \frac{1}{c_{n_z}} \mathbf{1}_{\|\mathbf{u}\| \leq 1} \equiv \frac{1}{V_s^{n_z}(1)} \mathbf{1}_{\mathcal{V}_s^{n_z}(1)}$$

which completes the proof.

From the previous theorem, the following steps allow to generate random point  $\mathbf{y}$  uniformly distributed in  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$  :

1. generate a random vector  $\mathbf{u}$  uniformly distributed on  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$
2. generate a scalar random variate  $r$  with density  $p(r) = n_z r^{n_z-1}$
3. return  $\mathbf{y} = r\mathbf{u}$

To generate  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) following pdf  $n_z r^{n_z-1}$  in previous step 2, we use the standard inverse method [Rub81, Pap84] as follows. The repartition function associated with  $p(r)$  is

$$v \triangleq F(t) = Pr\{r \leq t\} = n_z \int_0^t r^{n_z-1} dr = t^{n_z}$$

and its inverse is equal to  $F^{-1}(v) = v^{1/n_z}$ . Hence, the generation of  $r \sim p(r)$  is easily obtained by generating  $F^{-1}(v)$  with  $v \sim \mathcal{U}([0; 1])$ .

## Summary

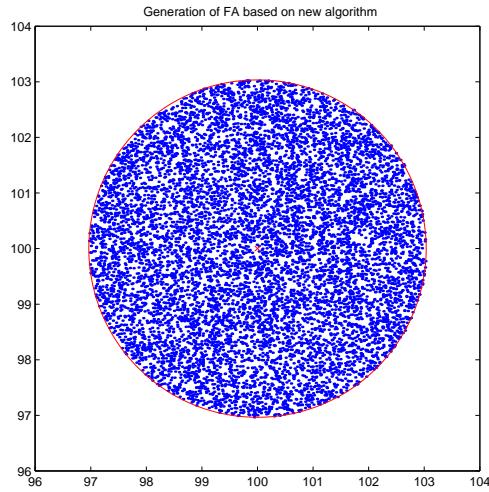
We give here the summary of our new algorithm for generating random points uniformly distributed in hyperellipsoid  $\mathcal{V}^{n_z}(\gamma)$ .

1. **Stage I** : Poisson Random Generator (PRG) to generate  $m_{FA}$
2. **Stage II** : Generation of  $m_{FA}$  random points uniformly distributed in gate as follows
  - generate iid points  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, \dots, m_{FA}$ ) uniformly distributed on unit hypersphere  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$ . Each point  $\mathbf{u}_i$  is generated by drawing  $n_z$  iid normal random variates  $u_1, \dots, u_{n_z}$ , computing  $s = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_{n_z}^2}$  and returning  $\mathbf{u}_i = [u_1/s, \dots, u_{n_z}/s]$ .
  - generate, independently of  $\mathbf{u}_i$ ,  $\text{scalarr}_i = v^{1/n_z}$  ( $i = 1, \dots, m_{FA}$ ) with  $v \sim \mathcal{U}([0; 1])$ .
  - compute  $\mathbf{y}_i = r\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, \dots, m_{FA}$ ).  $\mathbf{y}_i$  is uniformly distributed in  $\mathcal{V}_s^{n_z}(1)$ .
  - compute square root matrix  $\mathbf{T}$  of  $\mathbf{S}$  using Cholesky factorization ( $\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{T}'$ ).
  - compute  $\mathbf{x}_i = \mathbf{T}\mathbf{y}_i$  ( $i = 1, \dots, m_{FA}$ ).
  - return (false alarms)  $\mathbf{z}_i = \sqrt{\gamma}\mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{z}}$  ( $i = 1, \dots, m_{FA}$ ).

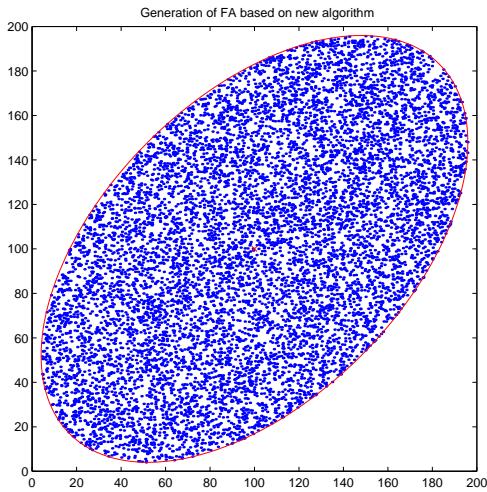
### Simulation results of random points generated by the new algorithm

We present on figure 9.3 the results of random points generation in 2D measurement space obtained with our new algorithm (provided in appendix for convenience) with same parameters as before ( $n_z = 2, P_g = 0.99, m_{FA} = 10000, \hat{\mathbf{z}} = [100 \ 100]'$ ) with

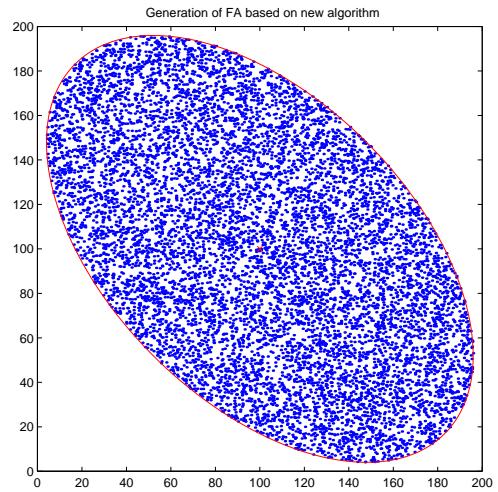
$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 500 \\ 500 & 1000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1000 & -500 \\ -500 & 1000 \end{bmatrix}$$



9.3.1 : Gate 1 :  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1$



9.3.2 : Gate 2 :  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_2$

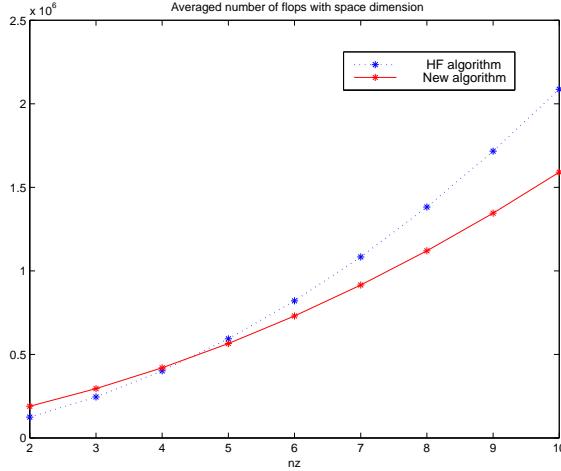


9.3.3 : Gate 3 :  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_3$

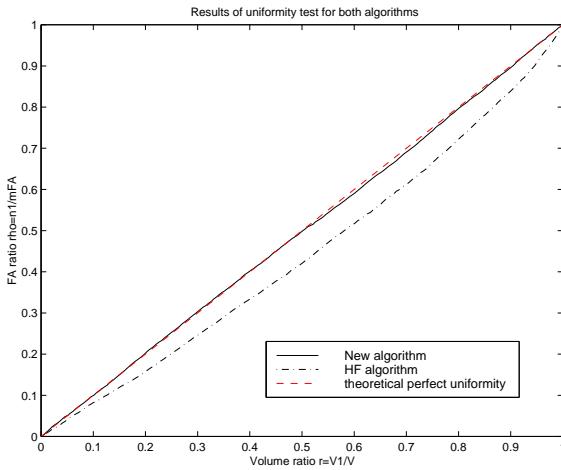
FIG. 9.3 – Simulation results of new algorithm ( $n_z = 2, P_g = 0.99$  and  $m_{FA} = 10000$ )

Simulations results on figure 9.3 show the better quality of spatial uniformity of random points gene-

rated by our new algorithm with respect to the uniformity obtained by HF algorithm on figure 9.2. This "visual" conclusion is reinforced by uniformity test results presented on next figure 9.4.2.



9.4.1 : Complexity of both algorithms



9.4.2 : Uniformity quality of both algorithms

FIG. 9.4 – Performance comparison of the new algorithm vs. HF algorithm

The comparison of the averaged number of Matlab flops (floating point operations) of the two algorithms with variation of measurement space dimension  $n_z$  is plotted on figure 9.4.1. These results are based on 10 Monte Carlo runs for each value of  $n_z$ . Each run consists in random generation of covariance matrix  $\mathbf{S}$  with  $\text{dim}(\mathbf{S}) = n_z \times n_z$  and generation of  $m_{FA} = 5000$  false alarms per gate. Results indicate the  $O(n^3/3)$  complexity of our new algorithm with measurement space dimension. The charge of computation is mainly due to Cholesky factorization step involved in our algorithm which requires  $O(n^3/3)$  arithmetic operations. All other steps of our algorithm require only  $O(n)$  operations. For small values of

measurement space dimension ( $n_z \leq 3$ ) the HF algorithm seems to require less amount of flops than our new algorithm. The difference of computation load between two algorithms is however not that much. When the dimension  $n_z$  increases, our algorithm however outperforms drastically HF algorithm in term of computation loads. We point out the fact that our algorithm does not require the inversion of matrix  $\mathbf{S}$  but only Cholesky factorization of  $\mathbf{S}$ . The number of flops for matrix inversion have not been taken into account for complexity evaluation of HF algorithm. If this had been done, its complexity would become greater than the complexity of our algorithm even for small measurement space dimensions. On figure 9.4.2, we present the results of the following uniformity test applied to both algorithms (with parameters  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_3$ ,  $m_{FA} = 10000$  and  $P_g = 0.99$ ). For any given real symmetric definite positive matrix  $\mathbf{S}$  and positive threshold  $\gamma$ , we consider the full gate volume  $V^{n_z}(\gamma)$  and any enclosing gate  $V^{n_z}(\gamma_1) < V^{n_z}(\gamma)$  with  $\gamma_1 = r\gamma$ , ( $0 \leq r \leq 1$ ). The ratio of two volumes  $V^{n_z}(\gamma_1)/V^{n_z}(\gamma)$  is then exactly equal to  $r^{n_z/2}$ . If the random points are exactly uniformly distributed in  $V^{n_z}(\gamma)$ , all of them included in any  $V^{n_z}(\gamma_1) < V^{n_z}(\gamma)$  must be necessarily uniformly distributed in  $V^{n_z}(\gamma_1)$  and therefore the ratio  $\hat{\rho}$  of number of points  $n_1$  in  $V^{n_z}(\gamma_1)$  over the total number  $m_{FA}$  of points generated in  $V^{n_z}(\gamma)$  must be theoretically equal to  $r^{n_z/2}$ . In 2D measurement space, if the algorithms are well designed, one should get the straight line  $\hat{\rho} \simeq r$  for  $r$  varying in  $[0; 1]$ . Simulation results clearly indicate the poor performance obtained by HF algorithm by using such empirical uniformity test. This confirm our previous "visual" conclusion about HF algorithm given in section 3.1. On the contrary, the new algorithm provides uniformity performances which appear to be very close to optimality.

### 9.1.5 Conclusion

We have presented in this paper a new efficient algorithm for generating directly random points uniformly distributed in hyperellipsoid defined by  $[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]'\mathbf{S}^{-1}[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}] \leq \gamma$ . This algorithm outperforms all previous existing methods in term of computation savings (since computation of  $\mathbf{S}^{-1}$  and computation of eigenvalues of  $\mathbf{S}^{-1}$  is not required), in term of quality of uniformity obtained and in term of complexity ( $O(n^3/3)$ ). The choice of this new method is highly recommended specially in multitarget tracking research area for running Monte Carlo simulations requiring an efficient and fast way to generate false measurements in validation gates.

### 9.1.6 Matlab routines

We provide here only stage II of the HF and new algorithm. The stage I can be easily accomplished by using `poissrnd` function of statistics toolbox of Matlab (if available) or by implementing one of PRG described in [Rub81, BFS83, Dev86].

#### Generic Matlab implementation of HF algorithm

```

1 %*****
2 function [ z_fa]=HFalgorithm(Gamma_Threshold,S_inv,z_hat,m_FA)
3 %*****
4 % This routine implements the T.J. HO and M. Farooq algorithm for
5 % generating random points uniformly distributed in hyperellipsoid .
6 % Inputs: Gamma_Threshold = Gating threshold (>0)
7 % S_inv = inverse of covariance matrix S (dim(S)=nznz)
8 % z_hat = center of the gate (dim(z_hat)=nzs1)
9 % m_FA = number of false alarms to generate in the gate
10 % Output: Z_fa = [z (1),... z(mFA)] set of FA generated by HF algorithm
11 %*****
12 [V,D]=eig(S_inv); % Decomposition inv(V)*S_inv*V=Diag(eigenvalues)
13 [Y,I]=sort(diag(D)); % Sorting of eigenvalues by ascending order
14 A=diag(Y,0); % Diagonal matrix of sorted eigenvalues
15 L=V(:,I); % Permutation of eigenvectors corresponding to eigenvalues
16 z_fa=[];nz=size(z_hat,1);
17 for l=1:m_FA
18 x(1)=sqrt(Gamma_Threshold/A(1,1))*(2*rand-1);
19 for i=2:nz
20 Tau_i=0;
21 for j=1:i-1, Tau_i=Tau_i+A(j,j)*(x(j)^2);end
22 Tau_i=Gamma_Threshold-Tau_i;
23 x(i)=sqrt(Tau_i/A(i,i))*(2*rand-1);
24 end
25 z_fa=[z_fa (L*x'+z_hat)];
26 end

```

### Generic Matlab implementation of the new algorithm

```

1 %*****
2 function [ z_fa]=New_Algorithm(Gamma_Threshold,S,z_hat,m_FA)
3 %*****
4 % This routine implements the new algorithm for generating random
5 % points uniformly distributed in hyperellipsoid for nz>=2.
6 % Inputs: Gamma_Threshold = Gating threshold (>0)
7 % S = Covariance matrix S (dim(S)=nzxnz)
8 % z_hat = center of the gate (dim(z_hat)=nzx1)
9 % m_FA = number of false alarms to generate in the gate
10 % Output: Z_fa = [z(1),... z(mFA)] set of FA generated by new algorithm
11 %*****
12 nz=length(S);
13 X_Cnz=randn(nz,m_FA);
14 X_Cnz=X_Cnz./kron(ones(nz,1),sqrt(sum(X_Cnz.^2)));           % Points uniformly distributed on hypersphere
15 R=ones(nz,1)*(rand(1,m_FA).^(1/nz));                          % Points with pdf nz*r^(nz-1); 0<r<1
16 unif_sph=R.*X_Cnz;                                            % m_FA points in the hypersphere
17 T=chol(S);                                                     % Cholesky factorization of S => S=T'T
18 unif_ell=T'*unif_sph;                                         % Hypersphere to hyperellipsoid mapping
19 z_fa=( unif_ell*sqrt(Gamma_Threshold)+(z_hat*ones(1,m_FA))); % Translation around gate center

```

## 9.2 Interview of Professor Bar-Shalom

The following interview entitled "Everything You Always Wanted to Know About Professor Bar-Shalom" has been conducted during the Banquet at the Workshop on Estimation, Tracking, and Fusion - A Tribute to Yaakov Bar-Shalom for his 60th Birthday, Naval Postgraduate School, Monterey, California, USA, May 17, 2001 [DBC<sup>+01</sup>] and a conference report written by Professor Peter K. Willett can be found in [Wil02].

### 9.2.1 Introduction

Professor Bar-Shalom, for the last 30 years, your name has been inseparably associated with MS-MTT (Multi-Sensor Multi-Target Tracking) ; no researcher working in the field can ignore your name and your contributions to the advancement of the tracking field, published in more than 290 papers, 7 books, 19 book chapters, and accorded with many distinctions. Although most researchers in the tracking area know you quite well professionally, very few people know your personal/human sides. We are very pleased to contribute here another look at you. We thank you heartily for having accepted this interview, and we

hope that readers will enjoy it as much as we have.

### 9.2.2 About Your Name

1. Could you tell us the meaning of your name ?

It means son [Bar (in Aramaic)] (of) peace [Shalom (in Hebrew)]

2. A quick web search of your name reveals that you are number 2982 on the list of the top 10000 most cited researchers in Computer Science (January 2001). Have you thought of joining the computer science department ?

I don't want to give a bad reputation to estimation...

**What is your favorite programming language ?**

The last time I programmed was in Fortran (20 yrs ago...)

3. We learned that your first name has something to do with tracking. What is that exactly ? Do you think that has anything to do with the fact that you are a pioneer and an unquestionable world leader in tracking area ?

Yaakov in modern Hebrew means "he shall track". The original meaning comes from Jacob (the 3rd patriarch, son of Isaac) who was born "holding the heel" of his brother Esau. The etimological explanation is "following in the heels of...", which became tracking. I also happen to believe in the causality between the given name of a person and this person's profession.

### 9.2.3 About Your Childhood and Your Family

1. You were born in Timisoara, Romania on May 11, 1941 during the second World War period. Could you tell us more about your early childhood ? Do you have pleasant recollection of good times of this period or was it to your memory only a very bad period ?

Fortunately we were spared from Nazis' plans of exterminating all the Jews. The Romanians, even though they were allied with the Nazis, did not let them take over. Fortunately, the antisemitism of those in power was exceeded by their corruption. They changed sides towards the end of WWII when it became clear which side is winning and fought with the same enthusiasm as before. My only memory from the war time is that once I decided to take a walk out of a bomb shelter where everybody went when RAF bombers were flying over Timisoara on their way to the Romanian oil fields. Eventually, my father found me and was not very happy.

2. Could you tell us a few words about your family ? What were your parents doing ? Are you from a scientist's or artist's family ? How many brothers and sisters do you have ?

My father was an antiquities merchant and accountant later. He was good with numbers. My mother raised my sister and me reminding us that success in life requires hard work in school. My sister, who is a psychologist, sent me a 140,000,000 year old fossil as the LX birthday present – to make me feel young.

**3. When did you move to Israel and under what conditions? How long did you stay there?**

After my father realized that there is no future for us under communism, we moved to Israel in 1960. After getting my B.S. in 1963 and M.S. in 1967 from the Technion, I came to Princeton for the Ph.D.

**4. Were you a quiet and studious little boy ?**

I was very quiet after my first electrical engineering experience at age 6 : I threw some old batteries behind our house and they ended up breaking the neighbors' window. Before this, at age 5, I showed my mechanical engineering capabilities when I hammered very thoroughly the living room furniture; my parents' quiet reaction shamed me into channeling my excess energy in a different direction.

**5. What did your teachers think of you and your future career ?**

My high school math teacher said that he will teach me a lot so I will learn a little.

**6. Did you always prefer math and physics, or did you prefer to learn literature and arts ?**

I could never write a decent literary composition, was never good at arts (even though I enjoy both) so the only thing left was math and science (with the exception of chemistry, which I flunked as a freshman). I learned to enjoy art from the history of art course I took as a senior at the Technion, after which I was fortunate to spend the summer in Europe marveling at the masterpieces I just studied.

**7. What did you dream to become when you were very young ?**

At age 5 I wanted to become a chauffeur, at age 7 a pilot. I realized these dreams after 15 and 35 years, respectively. The pilot license I got at the Navy Flying Club in Monterey.

**8. Do you consider yourself as an ex-prodigy, as did Norbert Wiener ?**

I am a slow study – by now I am probably at the level to be considered a child prodigy.

**9. Your son, Michael, is eleven now. Are you going to push him to follow your footsteps to have a distinguished career in engineering? Are you prepared for the teenager rebellion ?**

He is only ten, but recently he intimated to me that he hopes he did not inherit my engineering genes. I guess he already started his teenage rebellion.

**10. What else can you tell us about your family ?**

My wife is a Ph.D. in linguistics and she keeps correcting my word order in English. My daughters did not follow in my footsteps – since I flunked chemistry as a freshman, both of them majored in chemistry. After that, they became so motivated that one of them is a Ph.D. in biochemistry, the other is a veterinarian.

**11. Do you consider yourself a religious person ?**

I like tradition, and religion is a part of it. As far as the strict religious observance, my uncle in NY does it for the whole family.

**12. You are one of the most humorous persons we know, did you get this from your parents ?**

Humor was (and is) a necessity of life. It is also a tradition : does anybody know why Jews like to answer a question by another question ? Why not ?

**13. What are your favorite readings ?**

The biography of Churchill by William Manchester. The Roman Republic series of historic novels (from Gaius Marius to Caesar) by Colleen McCullough.

**14. What's your favorite quotation ?**

Keep things as simple as possible but not simpler (A. Einstein)

#### 9.2.4 About Your PhD Study

**1. Your Ph.D. dissertation is curiously never referenced in your very first papers, nor afterwards. Was this a deliberate or accidental omission ? What was your Ph. D. dissertation about ?**

An obscure controller.

**2. To be fair, do you consider that this work was excellent, very good or good enough ?**

I would not give today a Ph.D. for this work. It was deemed good enough to get a Ph.D. at the time.

**3. Who was your Major advisor ?**

Stuart Schwartz, who taught me to pursue an approach even if not ideal and evaluate it at the end.

**4. Did you have a good relationship with him ?**

Yes. He also taught me to shoot for long flat shots in tennis.

**5. Who also was a Ph.D. student there at same time, and had a distinctive career ?**

Tony Ephremides, now at UMD, well known in Information Theory (as well as in sailing).

**6. Do you have funny stories about your Ph.D. time ? Were they the Best Years of Your Life, as UConn claims to all of its students ?**

One snowy day at Princeton I ran into Tony Ephremides stuck with his newly acquired used car with bald tires in snow. I rescued him from being stuck forever (that's what he still thinks) by bumping into his car with mine. The bumpers were already rusty so the additional damage was undetectable.

**7. You got your B.S.E.E and your M.S.E.E at the Technion (Israel Institute of Technology) when you were 22 and 26 years old respectively. How did you make the choice to follow a scientific track/career ?**

I always thought electricity should be fun. But then I found out that estimation/tracking is even more fun.

**8. Was your choice influenced by some other famous scientists in the area ? Who were the eminent Professors who were teaching at the Technion at that time ?**

The first teacher who gave me a taste of research was my EM fields teacher Remus Raduletz in Romania, where I studied at the Polytechnic Institute of Bucharest until they kicked me out because we wanted to leave the country. He had his Ph.D. from ETH, Zurich, where Einstein studied. He taught me the rigor of Maxwell's equations as well as the Greek alphabet (he was named after one of the founders of Rome and the Romans had a great appreciation for the classical Greek education). At the Technion, Jack Ziv (who later invented, together with a classmate of mine, Abraham Lempel, the code used today by practically everybody without even knowing it – fax machines are based on it) taught me probability theory.

**9. You moved to the USA to pursue your Ph.D. degree. When did you move to USA ? Why did you choose this country ? Were you recommended by somebody, or was it difficult to find financial support by yourself ?**

My M.S. advisor at the Technion, Raphael Sivan, set the example by getting his Ph.D. at Berkeley. My predecessors at Princeton (Abe Haddad and Elias Masry) gave a good reputation there to the Technion graduates, which I could not dispel.

**10. How did you choose Princeton University and why ? Did you consider some other places at the same time ?**

I sent several applications to different places indicating that when I will finish my M.S. thesis I will publish it in a journal, but this was not taken seriously by most places. The paper from my M.S. thesis eventually appeared in IEEE T-AC while I was still working for my Ph.D. I also tried to apply to Berkeley but I did not get the forms on time. Two weeks before the deadline, I had a suspicion that they sent them by surface mail, so requested another set by air mail. Long after the deadline passed, I got two sets of forms by surface mail. Eventually the only place that offered me

an assistantship was Princeton.

- 11. Richard Bellman was one of your famous predecessors at Princeton. He completed his Ph.D. in a record time of three months and has published more than 600 papers and 38 textbooks. He had already left Princeton when you got there. Have you been in some way influenced by his work ? Did you hear any stories about him ?**

I did not hear much about him until I got to my first job at Systems Control in CA. One day he was invited to give a seminar in the morning and he was late – eventually he made it by the afternoon. Apparently he needed some extra time to finish book number 33 that he started the day before. I have to confess that I plagiarized one of his footnotes (about the principle of perversity of inanimate objects) but I referenced him.

- 12. Did you already plan to become a Professor ?**

No University wanted me until 1976.

- 13. Where did you arrive for the first time ? What was your first impression at your arrival and a few months after your arrival in U.S. ? Was it difficult to live and to understand the new way of American life ?**

The taxicab driver who took me from Kennedy airport to my uncle in NY said “You can’t be a student in the US, you don’t speak no English”.

### 9.2.5 About Your Industry Years

- 1. After completing your Ph.D. study in 1970, you worked as a Research Scientist/Engineer for Systems Control, Inc. until 1976 in California and you have been at same time part-time lecturer at University of Santa Clara. Why did you choose to go to work for Industry ? Was it too difficult to find an academic position in some American universities ? Was your choice guided by a financial and/or family reason ?**

Following the landing on the moon in ‘69, the NASA budget crashed, with most of the aerospace industry and University research following, and there were very few jobs in anything related to space and control (at the time I thought I was still in control). As an aside, a colleague and friend (Alex Levis, who is now Chief Scientist of the USAF) said that I would not have made it for tenure if I went directly into an academic position. I think he is right and I happened to be very lucky to join Systems Control.

- 2. Systems Control was almost like the Xerox PARC in control and estimation (excellent people, great ideas but cannot capitalize on the ideas). Can you tell us about what it was like to be at SCI in those days ?**

It was an unusually stimulating environment. I learned there more than in grad school.

**3. Who were your colleagues at SCI and where are they now ?**

The following graduates of SCI should be mentioned :

- Raman Mehra –Harvard, then President of SSCI
- Atif Debs – Georgia Tech
- Edison Tse – Stanford
- Howard Weinert – Johns Hopkins
- John Casti – U. of Portland, then Courant Inst., then U. Arizona
- Dave Kleinman – UConn, now at NPS (claims to be retired)
- Kent Wall – UVA, then NPS
- Alex Levis – MIT, then GMU (now USAF)
- Adrian Segall – MIT, then Technion
- Ben Friedlander – UC Davis, then UCSC
- Richard Wishner – President of ADS (originally named AIDS ; bought out by BAH), then DARPA
- Narendra Gupta – President of ISI (of MatrixX fame)
- Robert Larson – VP, then President of SCI, President of IEEE, now Silicon Valley venture capitalist

**4. How did you get into target tracking ?**

A colleague was trying to debias an EKF for reentry vehicle tracking and I noticed that the true initial range was 100kft, the initial estimate was 80kft and the initial variance given to the filter was  $10^6$  (that is 20 sigma!). Changing the  $10^6$  to  $10^8$  immediately eliminated the bias!

**5. Do you have any comments about your bosses at the time ? Anybody like Dilbert's manager ?**

My direct boss wanted to keep PDAF proprietary. However, when he went on vacation, I got the signature of the VP to publish it. This boss had 2 years until the paper appeared, but never made any effort to promote it. Another boss told me that whenever they hint at a problem, I go too far in solving it...

**6. Have you ever given thought to returning to Israel, for example to get a position at the Technion or in some other famous University there ?**

Yes, but I never got an offer from the Technion. When I got an offer from Univ. of Tel Aviv I wanted it at the Associate level but it was for a Senior Lecturer, so I chose to stay at SCI. The following year I got the offer I was looking for from UConn.

**7. When exactly did you decide to switch to academia, and why ?**

When my newly arrived boss asked me in 1975 to solve a problem I already solved years ago unbeknownst to him, I just gave him the report I wrote on it in 1971 and took it as a sign that it is time to leave for new pastures. In 1974 Dave Sworder told me that in 2 years I will be in academia

– he had a perfect prediction algorithm.

**8. When did you apply for position at University of Connecticut ? How did you choose UConn ? Was it difficult for you to move from the West Coast to New England ?**

Dave Kleinman called me one day in 1976 if I am interested in an interview at UConn. The first offer went to somebody else (with more papers than me at the time), but he preferred to start his own company, so I ended up in New England.

**9. During the years 1982-1984 you've been visiting Professor in Stanford and the Naval Postgraduate School, Monterey. Can you describe your experiences there ?**

Following my divorce in New England I felt like going back to Palo Alto, so I ended up at Stanford. I met my wife in Los Angeles after a seminar at UCSD during that time, so I quickly decided to spend another year in CA before I dragged her to CT (she still prefers CA, except for the earthquakes).

**10. Was UConn your first choice ?**

The only one.

**11. Among the technical projects that you worked on at Systems Control, are there any that you'd like to share, or that you are particularly proud of ?**

My best work in control was the “Dual Effect, Certainty Equivalence and Separation” paper, which drew a distinction between Certainty Equivalence and Separation in stochastic control and showed that, for a class of problems, Certainty Equivalence holds iff the control has no dual effect. Otherwise the PDAF (Probabilistic Data Association Filter) – in addition to several fielded radar tracking systems it has found applications in image tracking as well as wireless communication.

**12. Did you invent the PDAF at Systems Control ? If so, what was the reaction of your colleagues and employers ? Did you know at the time how important it would be ?**

My project manager was ready to fire me because I was spending time on senseless things. He asked a highly paid consultant at the time to evaluate my work and he said that it makes sense. The real proof of how he valued it was when he later published a similar approach from his consulting work at another organization.

**13. In its early days, did you think that PDA would achieve its present-day prominence, with applications not only in target tracking, but also in many other areas ?**

I felt there is something to it, but nothing like you are implying.

**14. What do you see as the limits of PDA ?**

One limit is the Cramer-Rao Lower Bound. The rest is up to the ingenuity of the many people working on problems where estimation in the presence of continuous and discrete uncertainties is needed.

- 15. Did you ever implement any of the algorithms, for example the PDAF, which you invented ?**

If you promise to keep this confidential : never (why ruin a good thing?).

- 16. You made some outstanding contributions in stochastic control area, particularly dual effect and dual control. In fact, you were a leading expert in that area in 1970s. What was the driving force for your shift of research focus from that area to tracking area ?**

Murray Wonham from Toronto wrote a paper stating (approximately) that “stochastic control can only change the system performance from very bad to bad”. First I insisted on proving him wrong, but eventually I succumbed to the obvious. My work in control did not have even 1

- 17. Why are you out of control these days ?**

For some reason, I got interested in useful things. The rest is a corollary. However, I still enjoy controlling vertical airfoils and foot supports on crystals.

### 9.2.6 About Your Students and Your Research

- 1. Up to now, you have been Major Advisor to seventeen Ph.D. students with degrees awarded at the University of Connecticut. Many of your former Ph.D. students are very active in the tracking research area. Are you very proud of the careers of your Ph.D. students ?**

Absolutely, I could not have accomplished (almost) anything significant without them.

- 2. In general, do you have good relationships with your former Ph.D. students ?**

Of course. One of them, in his last email to me, sent me the Melissa virus.

- 3. Many people who had the honor to work with you have been impressed with your deep insight about practical problems and with the keenness by which you search for solutions. Are the applications the starting point for your research ? If so, are there any criticisms about that ?**

I am sure that some people feel that without measure theory there can be no important work. However, I have a filter that blocks out such noise. Some people make a living from data mining – I prefer problem mining.

- 4. How many post-doctoral visitors have you hosted in your ESP lab ?**

- Alain Houles – formerly with the French Navy, now with NATO
- Claude Jauffret – formerly with the French Navy, now Univ. of Toulon
- Jean Dezert – ONERA, France
- Chun Yang – Sigtem Technology
- Eli Oron – Israel Aircraft Industries

**5. During your career, have you had the opportunity to meet and talk with Professor R. Kalman ? Did he influence your research ?**

I never talked to him. He talks only to God. When he was (still) doing reviews for IEEE T-AC, according to a former Editor of this journal, he used to classify all papers in three categories : Trivial, Wrong or “I’ve done it”. My encounter with his March 1960 paper on what became known as the Kalman Filter was fairly long : I plowed through it on my own in 1966 (during my military service in Israel) and it took me two weeks just to understand his notation of the norm of a vector w.r.t. a matrix.

**6. Have you observed a strong modification of the interests in this research field since the end of cold war, and especially since 1989 after the fall of Berlin wall and ex-USSR ? If so, is this effect in your opinion more beneficial or detrimental for the research area (from the scientific point of view) ?**

It’s back to the big time for tracking but with one difference : you can’t publish papers on scalar systems and you have to show relevance to some real problem.

**7. If you were able, like Dr. Frankenstein, to construct an ideal student, how would he or she be constituted ?**

Such a student would write in 3 months 3 seminal papers that I would not need to proofread (neither for the math, nor for the English). Anybody noticed the wrong word order ?

**8. Thinking back, which period is the most important in your career ?**

Curiously, I felt more productive in the last few years than ever before. Did anybody notice that car manufacturers use LX for their luxury versions ? When you get to be LX there is a lot of experience you can take advantage of and enjoy it.

**9. You have made so many great contributions, which one do you think had the greatest impact ? Which one are you most proud of ?**

The IMM (which is really not mine – it was invented by Henk Blom).

**10. In tracking and data fusion area, what topics do you think are most important ? What is the future of the area ?**

Find practical and efficient algorithms that fuse kinematic and feature data from improperly registered moving sensors (with biases, finite resolution, strange noises) about a large number of hard-to-describe nonstationary targets in a heterogeneous cluttered environment. Predictions are hard (especially about the future) but I believe the future is bright (technically) for this area.

**11. Have you instilled upon your students any bad habits ?**

- (a) To drive fast.
- (b) To have high standards in reviewing papers (which, as journal editors, they applied to me...)

(c) To charge properly when they consult (some companies think this is a bad habit).

## 12. Do you have some funny stories to tell us ?

One day, in the heat of advising a Ph.D. student on an interesting problem, I emptied my pipe into the trash can behind me and after a couple of minutes I felt an unusual heat in my back – the papers in the can were on fire. Turning the can upside down solved this problem.

### 9.2.7 About Your Leisure

**1. Let us talk now about your leisure. Almost all your close friends and colleagues know you love good wine and very spicy food. Where does this desire come from ? Do you cook yourself during your leisure time, and if so what is your favorite recipe ?**

Oenology was one my sabbatical projects. The desire for spicy food probably comes from growing up with a rather mild style of cooking. Blackened catfish is a favorite.

**2. We think that your ability to stomach hot food exceeds that of anyone I know. Who else is in your league when it comes to chili peppers ?**

A former student (from a famous spice country) survived Salsa Fuego at Denver International Airport (with only a major stomach upset) after it floored me.

**3. You like exotic food a lot. What is your favorite cuisine ?**

I am on a seafood diet – I eat every food I see.

**4. Your other passion is sailing, and you are a good sailor according to people who have already gone for a sail with you (and who are usually not so familiar with sailing). When did you learn sailing and where ? Have you ever participated in a sailing competition ? What is your worst memory of sailing ? What kind of sailing boat do you have/prefer (old ones or high-tech ones) ?**

At the 1979 IT Symposium in Italy Judea Pearl (from UCLA) suggested that we go sailing (he said he'll show me) and after we found a boat (in what was Yugoslavia at the time) he gave me the 5 minute lesson and jumped in the water to take a closer look at some topless girls. I managed to circle for a while and pick him up eventually. Two weeks after that I bought my first sailboat. It took 20 years to get the second one.

The highest tech boat I sailed on is the America's Cup winner Stars and Stripes – I did not sail in the Cup, only in the St. Martin 12m regatta where I qualified as a lowly crew.

I have no bad memories of sailing, just difficulty in communicating with a green crew. I am still learning how to do this more efficiently. The closest I got to a rock was under the Golden Gate Bridge when my crew were looking backwards and when I said “release right sheet” the port (left)

sheet was released. Since then I use only sailing terminology, to the dismay of my (sometimes green) crew.

**5. You have been sailing all over the world ; where is your favorite place and why ?**

San Francisco – they have every afternoon in summer a small craft warning.

**6. During the winter you love skiing. Are you a very reckless skier ? What kind of skiing do you prefer ?**

I had many days when I took no spills, so I am probably not reckless enough. I prefer downhill skiing because, as a lazy person, I would rather let nature (gravity in this case) do most of the work.

**7. What other sports do you take part in ?**

Sometimes I let some of my young (quadrigenarian) colleagues beat me at tennis.

**8. How do you spend your leisure time when you aren't on a boat or skiing ?**

Reading National Geographic or a good book and listening to classical music.

**9. How many weeks of vacation do you take on average per year ? During this time, does your mind succeed fully to leave the tracking area ?**

Two official weeks. The rest depends on how many weeks I attend conferences in a year. Since I am out of control, I cannot control my mind either.

**10. How would you characterize your driving : like sailing, adventurous, fast (I mean really fast) or just normal ?**

Very sedate. I always obey the old (pre 1974) Montana speed limit (“reasonable and proper”).

**11. Any tips if one is caught speeding on the highway and is about to get a ticket ?**

Say you were rushing to the nearest exit to find a bathroom, then ask the cop if he minds if you go to the second nearest tree while he writes the ticket.

**12. At one time, you tried to learn how to fly, but some accident happened. What is the story ?**

I learned what the propeller steering torque can do (in a souped-up Cessna 152) in the same way as the Admiral who was the boss at the Naval Postgraduate School (a former fighter pilot) at the time. If you do not apply enough left rudder control at take-off, it can take you off the runway (sideways, not up). Actually this happened before I got my license. After I got the license in 1984, I flew for two years, then I decided that I am too dangerous to those around me, so I stopped.

**13. Given that you are color-blind, how do you manage the traffic lights ?**

Except for one notorious horizontal light in Princeton, NJ, they usually have the red at the top. However, I heard that during the Cultural Revolution, red was for “go” in China. I like to drive in some of the European countries where traffic light rules are considered merely an opinion.

**14. You have been in many places of the world, which place do you like best ?**

The charming places (can't offend anyone).

**15. Do you like to travel and to visit foreign countries as a simple tourist rather than bringing with you your professional hat ?**

I don't need my professional hat anymore – a virtual one is glued on all the time.

### 9.2.8 About Your Retirement

**1. How many more years do you plan to teach ?**

Until I get tired or run out of good students, whichever comes first. I am not yet ready for maturity leave. I am not yet started to play golf.

**2. Do you accept well the idea of your retirement ? How and where will you spend your free time ? Sailing in Florida ?**

The Caribbean is more interesting.

### 9.2.9 More Difficult Questions

**1. Have you any regret about the choice of your career ? Maybe you'd have preferred to become a great Captain sailing all around the world ?**

There is much more satisfaction in getting together with people like you – my colleagues – than being all the time on the ocean.

**2. Have you ever thought to leave and give up this research area for something else ?**

When I grow up I'll figure out what I want to be.

**3. If you'd have only one paper to keep and you consider as your major contribution, which paper would it be ?**

The Maximum Likelihood PDA and CRLB-in-clutter paper, because they are exact.

**4. What is your own philosophy of life ?**

Enjoy it while you can. As I told a friend who recently became a quadrigenarian, after 40 it's all downhill but, like in skiing, with a lot of thrill.

The other one is : Illegitimi non carborundum.

**5. Any advice for all future young researchers willing to work in this area ?**

Be thorough in your work and honest in presenting the results.

**6. Do you have anything that you would do differently if given another chance ?**

I'll let you know next time.

**7. You used to have a beard some 20 year ago. When and why did you decide to change ?**

It was gray and I still did not get no respect...

**8. If you have to do your Ph.D. all over again, what will it be on? What would you do differently this time?**

I don't think I could easily do a piece of work worth a Ph.D. these days.

**9. Which important questions do we miss?**

1. Do you take yourself seriously? NO!

2. What is your pet peeve? Pharisaic janiform coprocephalocratic academic administrators (they don't understand this anyway).



# Bibliographie

- [AB85] A.T. Alouani and J.D. Birdwell. Combining local estimates in nonlinear systems. In *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, december 1985.
- [AB86] A.T. Alouani and J.D. Birdwell. Linear data fusion. In *Proceedings of the 18th Southeastern Symposium on System Theory*, pages 246–249, Knoxville, TN, april 7-8th 1986.
- [AB88] A.T. Alouani and J.D. Birdwell. Distributed estimation : Constraints on the choice of the local models. *IEEE Trans. on AC*, 30(5), 1988.
- [AB91] R.R. Allen and Samuel S. Blackman. Implementation of an angle-only tracking filter. In *Proceedings of the 1991 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1481, 1991.
- [ABSEM83] J. Arnold, Yaakov Bar-Shalom, E. Estrada, and R. Mucci. Target parameter estimation using measurements acquired with a small number of sensors. *IEEE Trans. Oceanic Engineering -OE*, 8 :163–172, july 1983.
- [AF70] Guy A. Ackerson and K.S. Fu. On state estimation in switching environments. *IEEE Transactions on AC*, 15 :10–17, february 1970.
- [AFL<sup>+</sup>88] T.G. Allen, L.B. Feinberg, R.O. LaMaire, Krishna R. Pattipati, H. Tsaknakis, and Robert B. Washburn. Multiple information set tracking correlator. Technical Report (MISTC) - Final Report TR-406, Alphatech, Burlington, MA, september 1988.
- [AH83] V.J. Aidala and S.E. Hammel. Utilization of modified polar coordinates for bearing-only tracking. *IEEE Transactions on AC*, 28 :283–293, march 1983.
- [Ahm94] M.S. Ahmed. Decentralized state estimation in large-scale systems. *Int. J. Systems Sci.*, 25(10) :1577–1591, 1994.
- [AHW96] S.S. Ahmeda, I. Harrison, and M.S. Woolfson. Adaptive probabilistic data association algorithm for tracking in cluttered environment. *IEE Proc. Radar, Sonar Navig.*, 143(1) :17–22, february 1996.

- [AIT91] A. Averbuch, S. Itzikowitz, and T.Kapon. Multifilters for radar tracking of a maneuvering target - viterbi vs. imm. In *Proceedings of the 1991 IEEE ICASSP conference*, volume 3, pages 11825–1828, 1991.
- [AK77] Hajime Akashi and Hiromitsu Kumamoto. Random sampling approach to state estimation in switching environments. *Automatica*, 13 :429–434, july 1977.
- [AKG86] D. Andrisani, F. Kuhl, and D. Gleason. A nonlinear tracker using attitude measurements. *IEEE Trans. on AES*, 22(5) :533–538, 1986.
- [AKS91] D. Andrisani, E.T. Kim, and J. Schierman. A nonlinear helicopter tracker using attitude measurements. *IEEE Trans. on AES*, 27(1) :40–47, 1991.
- [AL73] M. Aoki and M.T. Li. Partial reconstruction of state vectors in decentralized dynamic systems. *IEEE Trans. on AC*, pages 289–292, 1973.
- [Alo86] A.T. Alouani. *Implementation of Nonlinear Centralized Estimators in a Distributed Fashion*. PhD dissertation, The University of Tennessee, Knoxville, USA, december 1986.
- [Alo87a] A.T. Alouani. Distributed tracking with probabilistic data association. In *Proceedings of the 26th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1612–1613, Los Angeles, CA, december 1987.
- [Alo87b] A.T. Alouani. Linear distributed estimation. In *Proceedings of American Control Conference*, 1987.
- [Alo90] A.T. Alouani. Distributed estimators for multi-sensor systems. *Advanced Information Processing in Automatic Control*, pages 273–277, 1990.
- [Als75] D.L. Alspach. A gaussian sum approach to the multi-target identification-tracking problem. *Automatica*, 11 :285–296, 1975.
- [AP90] J. Arnold and H. Pasternak. Detection and tracking of low-observable targets through dynamic programming. In *Proceedings of the 1990 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1305, 1990.
- [AS68] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1968.
- [AS71] D.L. Alspach and H.W. Sorenson. Recursive bayesian estimation using gaussian sums. *Automatica*, 7, 1971.
- [Ast70] Karl J. Aström. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, New York, 1970. 299 pages.
- [AT67] Michael Athans and Edison Tse. A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle”. *IEEE Transactions on AC*, 12 :690–698, december 1967.
- [Avi92] D. Avitzour. A maximum likelihood approach to data association. *IEEE Trans. on AES*, 28 :560–566, 1992.

- [AWG77] Michael Athans, R.H. Whiting, and M. Gruber. A suboptimal estimation algorithm with probabilistic editing for false measurements with application to target tracking with wake phenomena. *IEEE Transactions on AC*, 22 :372–384, 1977.
- [BA94] Robert H. Bishop and A.C. Antoulas. Nonlinear approach to aircraft tracking problem. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(5) :1124–1130, september-october 1994.
- [Bac79] M. Bacharach. Normal bayesian dialogues. *J. of the American Statistical Association*, 74 :837–848, 1979.
- [Bar78] S.M Barta. *On Linear Control of Decentralized Stochastic Systems*. PhD dissertation, MIT, Cambridge, MA, july 1978.
- [Bar80] Y. Baram. Nonstationary model validation from finite data records. *IEEE Transactions on AC*, 25(1) :10–19, february 1980.
- [Bar85] Yair Barniv. Dynamic programming solution to detecting dim moving targets. *IEEE Transactions on AES*, 21 :144–156, january 1985.
- [Bar90a] Yair Barniv. Dynamic programming algorithm for detecting dim moving targets. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 4. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [Bar90b] Isabelle Barret. *Synthèse d'Algorithmes de Poursuite Multi-Radar d'Avions Civils Manœuvrants*. PhD dissertation, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE), Toulouse, France, june 25th 1990. 401 pages.
- [Bas84a] Michèle Basseville. On-line detection of jumps in mean. In Michèle Basseville and Albert Benveniste, editors, *Detection of Abrupt Changes in Signal and Dynamical Systems*, pages 11–26. Springer Verlag, 1984.
- [Bas84b] Michèle Basseville. Two examples of applications of the glr method in signal processing. In Michèle Basseville and Albert Benveniste, editors, *Detection of Abrupt Changes in Signal and Dynamical Systems*, pages 50–73. Springer Verlag, 1984.
- [Bas88] Michèle Basseville. Detecting changes in signals and systems - a survey. *Automatica*, 24(3) :309–326, may 1988.
- [Bat92] W.G. Bath. Use of multiple hypotheses in radar tracking. In *Proceedings of Radar 1992 Conference*, pages 90–93, Paris, France, 1992.
- [Bay63] Thomas Bayes. An essay toward solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of Royal Society*, LIII :370–418, 1763.
- [Bay58] Thomas Bayes. An essay toward solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, 45 :296–315, 1958. Communicated by Mr Price in a Letter to John Canton.

- [BB62] T.R. Benedict and G.W. Bordner. Synthesis of an optimal set of radar track-while-scan smoothing equations. *IEEE Trans. on AC*, 7 :27–32, july 1962.
- [BB83] Michèle Basseville and Albert Benveniste. Design and comparative study of some sequential jump detection algorithms for digital signals. *IEEE Trans. on ASSP*, 31(3) :521–535, 1983.
- [BB84] Michèle Basseville and Albert Benveniste. *Detection of Abrupt Changes in Signal and Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1984.
- [BB89] I.P. Bottlik and Samuel S. Blackman. Coordinated presentation of multiple hypotheses in multi-target tracking. In *Proceedings of the 1990 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1096, pages 152–159, april 1989.
- [BBP95] Samuel S. Blackman, M.T. Bush, and R.F. Popoli. Imm/mht tracking and data association for benchmark tracking problem. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pages 2606–2610, 1995.
- [BBR92] A. Badr, Z. Binder, and D. Rey. Weighted multi-model control. *Int. J. of Systems Sci.*, 2(1) :145–149, february 1992.
- [BBS84] Kailash Birmiwal and Yaakov Bar-Shalom. On tracking a maneuvering target in clutter. *IEEE Trans. on AES*, 20 :635–645, september 1984.
- [BBS88] Henk A.P Blom and Yaakov Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on AC*, 33(8) :780–783, august 1988.
- [BBS90] Henk A.P Blom and Yaakov Bar-Shalom. Time-reversion of a hybrid state stochastic difference system with a jump-linear smoothing applications. *IEEE Transactions on IT*, 36(4) :836–847, july 1990.
- [BCA79] J.D. Birdwell, David A. Castanon, and Michael Athans. On reliable control system designs with and without feedback reconfigurations. In *Proceedings of the 17th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 709–715, San Diego, CA, January 1979.
- [BCA86] J.D. Birdwell, David A. Castanon, and Michael Athans. A reliable control system design. *IEEE Trans. on SMC*, 16(5) :703–710, 1986.
- [BD67] J.F. Bellatoni and K.W. Dodge. Square-root formulation of kalman-schmidt filter. *AIAA Journal*, 5 :1309–1314, 1967.
- [BDA79] John B. Moore Brian D.O. Anderson. *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979. 357 pages.
- [BDB92] Samuel S. Blackman, R.J. Dempster, and T. Broida. Design and evaluation of multiple hypothesis tracking for infrared surveillance systems. In *Proceedings of the 1992 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, pages 457–470, april 1992.

- [BDB93] Samuel S. Blackman, R. Dempster, and T. Broida. Multiple hypothesis track confirmation for infrared surveillance systems. *IEEE Trans. on AES*, 29(3) :810–823, july 1993.
- [BDF95] Samuel S. Blackman, R.J. Dempster, and J.T. Fagarasan. Continuous time representation of multiple hypothesis track data. In *Proceedings of the 1995 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 352–360, 1995.
- [BDN96] Samuel S. Blackman, R.J. Dempster, and T.S. Nichols. Application of multiple hypothesis tracking to multi-radar air defense systems. *AGARDograph 337 : Multi-sensor Multi-Target Data Fusion, Tracking and Identification Techniques for Guidance and Control Applications*, pages 96–120, october 1996.
- [Bel60] Richard Bellman. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
- [Bel74] P.R. Belanger. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*, 10 :267–275, 1974.
- [Bel97] Thierry Beley. Estimation décentralisée, modélisation locale et observabilité partielle. In *Proceedings of the Colloque GRETSI*, Grenoble, France, 1997.
- [Bel98] Thierry Beley. *Estimation probabiliste par des Systèmes d'Observateurs décentralisé : Application aux Systèmes de trajectographie Géographiquement Répartis*. PhD dissertation, Université Claude Bernard - Lyon I, Lyon, France, may 15th 1998.
- [Ben84] Albert Benveniste. Advanced methos of change detection : An overview. In Michèle Basseville and Albert Benveniste, editors, *Detection of Abrupt Changes in Signal and Dynamical Systems*, pages 77–102. Springer Verlag, 1984.
- [Ber82] Dimitri P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York, 1982.
- [Ber83] R.F. Berg. Estimation and prediction for maneuvering target trajectories. *IEEE Trans. on AC*, 28(3) :303–313, march 1983.
- [Ber88] Dimitri P. Bertsekas. The auction algorithm : A distributed relaxation method for the assignment problem. *Annals of Operational Research*, 14 :105–123, 1988.
- [Ber91] Dimitri P. Bertsekas. *Linear Network Optimization : Algorithms and Codes*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1991.
- [Ber92] Dimitri P. Bertsekas. Auction algorithm for network flow problems : A tutorial introduction. *Computational Optimization and Applications*, 1 :7–66, 1992.
- [BFS83] P. Bratley, B.L. Fox, and L.E. Schrage. *A Guide to Simulation*. Springer Verlag, New York, 1983.

- [BG97] D.M. Buede and P. Girardi. A target identification comparison of bayesian and dempster-shafer multisensor fusion. *IEEE Trans. on SMC*, 27(5), 1997.
- [BH91] Steven Blostein and T.S. Huang. Detecting small, moving objects in image sequences using sequential hypothesis testing. *IEEE Trans. on Sign. Proc.*, 39(7) :1611–1629, 1991.
- [BH92] R.G. Brown and P. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- [Bha86] B. Bhanu. Automatic target recognition : A survey. *IEEE Trans. AES*, 22 :364–379, july 1986.
- [BHS90] Henk A.P Blom, R.A. Hogendoorn, and F.J. Van Schaik. Bayesian multi-sensor tracking for advanced air traffic control systems. In A. Benoit, editor, *Aircraft Trajectories, Computation, Prediction, Control*, volume 2 of *AGARDograph 301*, page paper 34. AGARD, 1990.
- [BHvD92] Henk A.P. Blom, René A. Hogendoorn, and Bas A. van Doorn. Design of a multisensor tracking system for advanced air traffic control. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 2. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [Bie77] Gerald J. Bierman. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. Academic Press, New York, 1977.
- [Bie85] Gerald J. Bierman. Numerical experience with modern estimation algorithms. In *Proceedings of the 24th IEEE Conf. on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, december 1985.
- [Bis90] Robert H. Bishop. *Geometric Non-Linear Filtering Theory with Applications to the Maneuvering Tracking Problem*. PhD dissertation, Rice University, Houston, TX, 1990.
- [BJ78a] Y. Baram and N.R. Sandell Jr. Consistent estimation on finite parameter sets with application to linear systems identification. *IEEE Transactions on AC*, 23(3) :451–454, june 1978.
- [BJ78b] Y. Baram and N.R. Sandell Jr. An information theoretic approach to dynamical systems modeling and identification. *IEEE Transactions on AC*, 23(1) :61–66, february 1978.
- [BL71] F. Bourgeois and J.C. Lassalle. An extension of the munkres algorithm for the assignment problem to rectangular matrices. *Communications of the ACM*, 14(12) :802–804, december 1971.
- [Bla86] Samuel S. Blackman. *Multiple Target Tracking with Radar Applications*. Artech House, Boston, MA, 1986.
- [Bla90a] Samuel S. Blackman. Association and fusion of multiple sensor data. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 4. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [Bla90b] Samuel S. Blackman. *A Method for Evaluating Track Confirmation Performance for Dim Moving Targets*. Private Communication, 1990.

- [Bla92] Samuel S. Blackman. Multitarget tracking with agile beam radar. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 8. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [Blo82] Henk A.P. Blom. Detection-filter representations for markov jump diffusions. Technical Report Report NLR, TR 82019 U, National Aerospace Laboratory, NLR, Amsterdam, The Netherlands, march 1982.
- [Blo83] Henk A.P. Blom. Comparison of jump diffusion tracker with a kalman tracker. an evaluation with emphasis on air traffic control. Technical Report Report NLR, TR 83063 U, National Aerospace Laboratory, NLR, Amsterdam, The Netherlands, march 1983.
- [Blo84a] Henk A.P. Blom. An efficient filter for abruptly changing systems. In *Proceedings of the 23rd Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, NV, december 1984.
- [Blo84b] Henk A.P. Blom. Markov jump-diffusion models and decision-making-free filtering. In A. Ben-soussan and J.L. Lions, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, volume Part 1, pages 568–580. Springer Verlag, 1984.
- [Blo84c] Henk A.P. Blom. Markov jump-diffusion models and decision-making-free filtering. In A. Ben-soussan and J.L. Lions, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, chapter Part I, pages 568–580. Springer Verlag, 1984.
- [Blo84d] Henk A.P. Blom. A sophisticated tracking algorithm for atc surveillance radar data. In *Proceedings of the Int. Conf. on Radar 1984*, pages 393–398, Paris, may 1984.
- [Blo85] Henk A.P. Blom. An efficient decision-making-free filter for processes with abrupt changes. In *Proceedings of 7th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, pages 631–636, York, United Kingdom, july 1985.
- [Blo86] Henk A.P. Blom. Overlooked potential of systems with markovian switching coefficients. In *Proceedings of the 25th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1758–1764, Athena, Greece, december 1986.
- [Blo90] Henk A.P. Blom. *Bayesian Estimation for Decision-Directed Stochastic Control*. PhD dissertation, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, may 1990.
- [Blo91] Henk A.P. Blom. Hybrid state estimation for systems with semi-markov switching coefficients. In *Proceedings of the First European Control Conference*, pages 1132–1137, Grenoble, France, july 1991.
- [BLW90] R.S. Baheti, A.J. Laub, and D.M. Wiberg. Bierman memorial issue on factorized estimation applications. *IEEE Transactions on AC*, 35 :1282–1337, 1990.
- [BM72] K.K. Biswas and A.K. Mahalanabis. An approach to fixed point smoothing. *IEEE Transactions on AES*, 8 :676–682, 1972.

- [BMM79] Christopher Bowman, Carles L. Morefield, and M.S. Murphy. Multisensor multitarget recognition and tracking. In *Proceedings of 13th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*, november 1979.
- [BMP90] Albert Benveniste, M. Metivier, and P. Priouret. *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*. Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [Bog87a] P.L. Bogler. Shafer-dempster reasoning with applications to multisensor target identification systems. *IEEE Transactions on SMC*, 17(6), 1987.
- [Bog87b] P.L. Bogler. Tracking a maneuvering target using input estimation. *IEEE Transactions on AES*, 23(3) :298–310, may 1987.
- [Boh76] T. Bohlin. Four cases of identification of changing systems. In R.K. Mehra and D.G. Lainiotis, editors, *System Identification : Advances and Case Studies*. Academic Press, New York, 1976.
- [Bot87] I.P. Bottlik. Development of a multiple hypotheses tracking (mht) algorithm. In *in Multitarget/Multisensor Tracking II : Advanced Applications, UCLA Short Course Notes (Coordinator Y. Bar-Shalom)*, january 1987.
- [Bow93] Christopher Bowman. Possibilistic verses probabilistic trade-off for data association. In Oliver Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 341–351, 1993.
- [Boz83a] Claude A. Bozzo. *Le Filtrage Optimal et ses Applications aux Problèmes de Poursuite : Tome 1*. Diffusion Librairies Lavoisier, 11 Rue Lavoisier, F75384 Paris Cedex 08, 1983. 264 pages.
- [Boz83b] Claude A. Bozzo. *Le Filtrage Optimal et ses Applications aux Problèmes de Poursuite : Tome 2*. Diffusion Librairies Lavoisier, 11 Rue Lavoisier, F75384 Paris Cedex 08, 1983. 758 pages.
- [Boz83c] Claude A. Bozzo. *Le Filtrage Optimal et ses Applications aux Problèmes de Poursuite : Tome 3*. Diffusion Librairies Lavoisier, 11 Rue Lavoisier, F75384 Paris Cedex 08, 1983. 643 pages.
- [BP76] E. Balas and M.W. Padberg. Set partitioning : A survey. *SIAM Review*, 18(4) :710–761, october 1976.
- [BR94] Steven Blostein and Haydn Richardson. A sequential detection approach to target tracking. *IEEE Trans. AES*, 30, january 1994.
- [BR95] Steven Blostein and Haydn Richardson. A sequential hypothesis testing approach to combined target detection and tracking. In *Proceedings of the 1995 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 256–267, 1995.
- [Bri79] A.W. Bridgewater. Analysis of second and third order steady-state tracking filters. In *Proceedings of AGARD Conference*, 252(9), 1979.
- [Bro69] Roger W. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969. 243 pages.

- [Bro89] W.L. Brogan. Algorithm for ranked assignments with applications to multiobject tracking. *IEEE J. Guidance*, 12 :357–364, 1989.
- [Bro92] L. Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24(4) :325–376, 1992.
- [Bru82] Franck E. Bruneau. State estimation of a hybrid markov process with application to multitarget tracking. Technical Report Technical Report LIDS-TH-1172, Office of Naval Research, 800, Quincy Street, Code 411MA, Arlington, VA 22217, USA, January 1982.
- [BS74] Yaakov Bar-Shalom. Extension of the probabilistic data association filter to multitarget environments. In *Proceedings of the 5th Symp. Nonlinear Estimation Theory and Its Applications*, pages 16–21, San Diego, CA, september 1974.
- [BS75] W.P. Blair and D.D. Sworder. Feedback control of a class of linear discrete-time systems with jump parameters and quadratic cost criteria. *Int. J. of Control*, 21(5) :833–841, 1975.
- [BS78] Yaakov Bar-Shalom. Tracking methods in a multitarget environment. *IEEE Transactions on AC*, 23(4) :618–626, august 1978.
- [BS81] Yaakov Bar-Shalom. On the track-to-track correlation problem. *IEEE Transactions on AES*, 26(2) :571–572, april 1981.
- [BS85] Yaakov Bar-Shalom. Multitarget tracking. In *Exposé patroné par le JDCN-STCAN*, Vanves, France, july 17-19th 1985.
- [BS90] Yaakov Bar-Shalom. *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [BS91a] Yaakov Bar-Shalom. *Estimation and Tracking : Principles and Techniques*. YBS Course Notes, Storrs, CT, 1991.
- [BS91b] Yaakov Bar-Shalom. *PassDat 2.5 : Passive Sensor Data Association for Tracking*. Interactive Software, UConn, Storrs, CT, 1991.
- [BS92] Yaakov Bar-Shalom. *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, volume 2. Artech House, Inc., Dedham, MA, 1992. 442 pages.
- [BS93] Yaakov Bar-Shalom. *Multisensor-Multitarget Tracking : Principles and Techniques*. YBS Course Notes, Storrs, CT, 1993.
- [BSB82] Yaakov Bar-Shalom and Kailash Birmiwal. Variable dimension filter for maneuvering target tracking. *IEEE Transactions on AES*, 18(5) :621–629, september 1982.
- [BSB83] Yaakov Bar-Shalom and Kailash Birmiwal. Consistency and robustness of pdaf for target tracking in cluttered environments. *Automatica*, 19 :431–437, july 1983.

- [BSB92] Yaakov Bar-Shalom and Henk A.P. Blom. *Passive/Active Surveillance and Tracking : Algorithms and Performance Evaluations*. Lectures Notes, UCLA Engineering 839.49, Los Angeles, CA, january 13-17 1992.
- [BSC86] Yaakov Bar-Shalom and Leon Campo. The effect of common process noise on the two-sensor fused-track covariance. *IEEE Transactions on AES*, 22 :803–805, november 1986.
- [BSCB89] Yaakov Bar-Shalom, Kuo-Chu Chang, and Henk A.P. Blom. Tracking a maneuvering target using input estimation versus the interacting multiple model algorithm. *IEEE Transactions on AES*, 25(2) :296–300, april 1989.
- [BSCB90] Yaakov Bar-Shalom, Kuo-Chu Chang, and Henk.A.P. Blom. Automatic track formation in clutter with a recursive algorithm. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 2. Artech House, Dedham, MA, 1990. 369 pages.
- [BSCB92] Yaakov Bar-Shalom, Kuo-Chu Chang, and Henk A.P. Blom. Tracking splitting targets in clutter using an interacting multiple model joint probabilistic data association filter. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 4. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [BSCL90] Yaakov Bar-Shalom, Leon Campo, and Peter B. Luh. From receiver operating characteristic to system operating characteristic. *IEEE Transactions on AC*, 35(2) :172–179, february 1990.
- [BSCS89] Yaakov Bar-Shalom, Kuo-Chu Chang, and Hemchandra M. Shertukde. Performance analysis of a cascaded logic for track formation in clutter. *IEEE Transactions on AES*, 25(2) :873–877, november 1989.
- [BSF88] Yaakov Bar-Shalom and Thomas E. Fortmann. *Tracking and Data Association*. Academic Press, New York, 1988. 353 pages.
- [BSFS80] Yaakov Bar-Shalom, Thomas E. Fortmann, and Molly Scheffe. Joint probabilistic data association for multiple targets in clutter. In *Proceedings of the Conf. on Information Sciences and Systems*, Princeton, NJ, march 1980.
- [BSJ72] Yaakov Bar-Shalom and A.G. Jaffer. Adaptive non linear filtering for tracking with measurement of uncertain origin. In *Proceedings of the 11th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 243–247, Los Angeles, CA, december 1972.
- [BSL91] Yaakov Bar-Shalom and Xiao Rong Li. Effectivness of the likelihood function in logic-based track formation. *IEEE Trans. on AES*, 27 :184–187, january 1991.
- [BSL93] Yaakov Bar-Shalom and Xiao Rong Li. *Estimation and Tracking : Principles, Techniques, and Software*. Artech House, Inc., Boston, MA, 1993. 511 pages.
- [BSL95] Yaakov Bar-Shalom and Xiao Rong Li. *Multitarget-Multisensor Tracking : Principles and Techniques*. YBS Publishing, Storrs,CT, 1995. 615 pages.

- [BSLC90] Yaakov Bar-Shalom, Xiao Rong Li, and Kuo-Chu Chang. Non-stationary noise identification with interacting multiple model algorithm. In *Proceedings of the 5th Int. Symp. Intelligent Control*, pages 585–589, Philadelphia, PA, september 1990.
- [BSM79] Yaakov Bar-Shalom and Glenn D. Marcus. Multitarget tracking with measurements of uncertain origin. Technical Report Tech. Rep. EECS-79-14, University of Connecticut, Storrs, CT, 1979.
- [BSM80] Yaakov Bar-Shalom and Glenn D. Marcus. Tracking with measurements of uncertain origin and random arrival. *IEEE Transactions on AC*, 25 :802–807, august 1980.
- [BST73] Yaakov Bar-Shalom and Edison Tse. Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association. In *Proceedings of the 4th Symp. Nonlinear Estimation Theory and Its Applications*, San Diego, CA, september 1973.
- [BST75] Yaakov Bar-Shalom and Edison Tse. Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association. *Automatica*, 11 :451–460, september 1975.
- [BSTD73] Yaakov Bar-Shalom, Edison Tse, and R. Dressler. Adaptive estimation in the presence of non-stationary noises with unknown statistics - application to maneuvering targets. In *Proceedings of the 4th Symp. Nonlinear Estimation Theory and Its Applications*, pages 23–28, San Diego, CA, september 1973.
- [BT75] R. Buratti and G. Trezona. Utilization of a forced-choice technique for requirements for detection systems. *JASA*, 57(4) :569–577, april 1975.
- [BT77] Gerald J. Bierman and C.L. Thornton. Numerical comparison of kalman filter algorithms : Orbit determination case study. *Automatica*, 13 :23–37, january 1977.
- [Buc65] R.S. Bucy. Nonlinear filtering. *IEEE Trans. on AC*, 10, 1965.
- [Bue80] Gérard Bueno. *Antenne Adaptative et Estimation Bayésienne*. PhD dissertation, Université d'Aix-Marseille 3, Faculté de Saint-Jérôme, december 1980.
- [Bun88] W.T. Bundick. Development of a technique for estimating noise covariances using multiple observers. Technical Report NASA Technical Memorandum 4020, Langley Research Center, Hampton, VA, 1988.
- [BV88] Isabelle Barret and Pierre Vacher. Définition d'algorithmes de poursuite multi-radars d'avions manœuvrants. Technical Report Rapport Intermédiaire 1-7548, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Toulouse, France, july 1988.
- [BV89a] Isabelle Barret and Pierre Vacher. Analyse des performances d'algorithmes de poursuite markoviens. Technical Report Rapport Intermédiaire 2-7548, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Toulouse, France, february 1989.

- [BV89b] Isabelle Barret and Pierre Vacher. Poursuite de cibles manœuvrantes par des algorithmes markoviens hybrides. In *Proceedings of the Colloque GRETSI*, pages 189–192, Juan Les Pins, France, june 1989.
- [BVW75] T. Boel, P. Varaiya, and E. Wong. Martingales on jump processes. *SIAM J. Control*, 13(5) :999–1061, august 1975.
- [BW87] S. Blake and S.C. Watts. A multitarget track-while-scan filter. In *Proceedings of IEE Radar 87 Conference*, London, England, october 1987.
- [BW94] W.P. Blair and G.A. Watson. Imm algorithm for solution to benchmark problem for tracking maneuvering targets. In *Proceedings of SPIE Conf. on Acquisition, Tracking and Pointing IX*, volume 2221, pages 476–488, 1994.
- [BW96] W.P. Blair and G.A. Watson. Benchmark for radar resource allocation and tracking targets in the presence of ecm. Technical Report Tech. Rep. NSWCDD/TR-96/10, Naval Surface Warfare Center Dahlgren Division(NSWCDD), february 1996.
- [BWGH95] W.P. Blair, G.A. Watson, G.L. Gentry, and S.A. Hoffman. Benchmark problem for beam pointing control of phased array radar against maneuvering targets in the presence of false alarms and ecm. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pages 2601–2605, 1995.
- [BWH93] W.D. Blair, G.A. Watson, and S.A. Hoffman. Second order interacting multiple model algorithm for tracking maneuvering targets. In Oliver Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 518–529, 1993.
- [BWH94] W.P. Blair, G.A. Watson, and S.A. Hoffman. Benchmark problem for beam pointing control of phased array radar against maneuvering targets. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, pages 2071–2075, 1994.
- [WKBS99] W.D. Blair, G.A. Watson, T. Kirubarajan, and Yaakov Bar-Shalom. Benchmark for radar ressource allocation and tracking targets in the presence of ecm. *to appear in IEEE Transactions on AES*, 1999.
- [BWR91] W.P. Blair, G.A. Watson, and T.R. Rice. Tracking maneuvering targets with an interacting multiple model filter containing exponentially correlated acceleration models. In *Proceedings of Southeastern Symp. Systems Theory*, Columbia,SC, march 1991.
- [CA78] C.B. Chang and Michael Athans. State estimation for discrete systems with switching parameters. *IEEE Transactions on AES*, 14(5) :418–425, may 1978.
- [CA85] S.B. Colegrove and J.K. Ayliffe. An extension of probabilistic data association to include track initiation and termination. In *Proceedings of Convention Digest, 20th IRE Int. Conv.*, pages 853–856, Melbourne, Australia, september 1985.

- [CA87] S.B. Colegrove and J.K. Ayliffe. The initiation and maintenance of target tracks in a non-uniform cluttered environment. Technical Report Tech. Rep. NO ERL-0365-TR, Defence Science and Technology Organization, Australia, november 1987.
- [Cag80] A.K. Caglayan. Simultaneous failure detection and estimation in linear systems. In *Proceedings of the 19th IEEE Conf. Decision and Control*, Albuquerque, NM, december 1980.
- [Cap95] M.J. Caputi. A necessary condition for effective performance of the multiple model adaptive estimator. *IEEE Transactions on AES*, 31 :1132–1139, july 1995.
- [CAP98] D. Van Cappel, P. Alinat, and J.M. Passerieux. Frequency line detection and tracking using multiple hidden markov models. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [Car90] H.A. Carlson. Federated square root filter for decentralized parallel processes. *IEEE Transactions on AES*, 26(3) :517–525, may 1990.
- [Car93a] H.A. Carlson. Federated kalman filter simulation results. In *Proceedings of the 49th Annual Meeting on Future Global Navigation and Guidance*, pages 1421–455, Cambridge, MA, 1993.
- [Car93b] J.R. Carpenter. *A New Data Fusion Filter for Rendezvous Navigation with Global Positioning System Aiding*. PhD dissertation, The University of Texas, Austin, TX, may 1993.
- [CARB92] Dela Cruz, A.T. Alouani, T. Rice, and W. Blair. Sensor registration in multisensor systems. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, pages 382–393, 1992.
- [Cas80] Frank R. Castella. An adaptive two-dimensional kalman tracking filter. *IEEE Transactions on AES*, 16(6) :822–829, november 1980.
- [Cas92] D.A. Castanon. New assignment algorithms for data association. In *Proceedings of the 1992 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, page 313, Orlando, FL, april 1992.
- [CB73] B. Carew and P.R. Belanger. Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances. *IEEE Transactions on AC*, 18(6) :582–587, december 1973.
- [CB83] Kuo-Chu Chang and Yaakov BarShalom. Joint probabilistic data association filter for multi-target tracking with possibly unresolved measurements. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 466–471, 1983.
- [CB84a] Kuo-Chu Chang and Yaakov BarShalom. Distributed adaptive estimation with probabilistic data association. *Automatica*, 25(3) :359–369, 1984.

- [CB84b] Kuo-Chu Chang and Yaakov BarShalom. Joint probabilistic data association filter for multi-target tracking with possibly unresolved measurements and maneuvers. *IEEE Trans. on AC*, 29(7) :585–594, july 1984.
- [CB87a] Kuo-Chu Chang and Yaakov BarShalom. Distributed adaptative estimation with multiple models. In *Proceedings of American Control Conference*, 1987.
- [CB87b] Kuo-Chu Chang and Yaakov BarShalom. Distributed adaptative estimation with probabilistic data association. In *Proceedings of IFAC*, 1987.
- [CB93] J.R. Carpenter and Robert H. Bishop. Estimate fusion for lunar rendezvous. In *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conf.*, pages 1–10, Monterey, CA, august 1993.
- [CB96a] J.R. Carpenter and Robert H. Bishop. Target state estimation for suboptimal rendez-vous navigation via fusion of inertial and rendezvous filter estimates. In *Proceedings of AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Conf.*, pages paper no AAS 96–110, Austin, TX, february 1996.
- [CB96b] Kuo-Chu Chang and Yaakov BarShalom. Multisensor tracking and fusion with mti radars. *AGARDograph 337 : Multi-sensor Multi-Target Data Fusion, Tracking and Identification Techniques for Guidance and Control Applications*, pages 121–129, october 1996.
- [CBS90a] Leon Campo and Yaakov Bar-Shalom. Control of discrete-time hybrid stochastic systems. In *Proceedings of 1990 American Control Conference*, San Diego, CA, june 1990.
- [CBS90b] Leon Campo and Yaakov Bar-Shalom. A new controller for discrete time stochastic system with markovian jump parameters. In *Preprints of 11th IFAC World Congress*, pages 1–6, Tallinn, Estonia, USSR, August 1990.
- [CCB86] Kuo-Chu Chang, Chee-Yee Chong, and Yaakov BarShalom. Joint probabilistic data association in distributed sensor networks. *IEEE Trans. on AC*, 31(10) :889–897, 1986.
- [CCHW97] S. Chang, F. Cheng, W. Hsu, and G. Wu. Fast algorithm for point pattern matching : Invariant to translation, rotations and scales changes. *Pattern Recognition*, 30(2) :311–320, 1997.
- [CCM86] Chee-Yee Chong, Kuo-Chu Chang, and Shozo Mori. Distributed tracking in distributed sensor networks. In *Proceedings of American Control Conference*, 1986.
- [CDA86] S.B. Colegrove, A.W. Davis, and J.K. Ayliffe. Track initiation and nearest neighbours incorporated into probabilistic data association. *J. Electrical Electronics Engineering*, 6(3) :191–198, september 1986.
- [CG98] Jean-Pierre Le Cadre and Hervé Gauvrit. Approximations of the cramer-rao bound for multiple target motion analysis. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.

- [Cha83] Kuo-Chu Chang. Joint probabilistic data association filter for multitarget tracking with possibly unresolved measurements. M.S. dissertation, University of Connecticut, Storrs, CT, september 1983.
- [Cha86] Kuo-Chu Chang. A simplification of the jpdam algorithm. *IEEE Trans. on AC*, 31(10) :989–991, october 1986.
- [Che84] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt-Saunders International editions (HSIE), New York, 1984. 662 pages.
- [Che93] G. Chen. *Approximate Kalman Filtering*. Word Scientific, 1993.
- [Che96] F. Cheng. Point pattern matching algorithm invariant to geometrical transformation and distortion. *Pattern Recognition Letters*, 17 :1429–1435, 1996.
- [Chm81] M.A. Chmielewski. Elliptically symmetric distributions : A review and bibliography. *International Statistical Review*, 49 :67–74, 1981.
- [Cho79] Chee-Yee Chong. Hierarchical estimation. In *Proceedings of MIT/ONR C3 Workshop*, Monterey, CA, 1979.
- [CHP79] Y.T. Chan, A.G.C. Hu, and J.B. Plant. A kalman filter based tracking scheme with input estimation. *IEEE Transactions on AES*, 15(2) :237–244, march 1979.
- [CL94] I.J. Cox and John J. Leonard. Modeling a dynamic environment using a bayesian multiple hypothesis approach. *Artificial Intelligence*, 66 :311–344, 1994.
- [CLL74] Richard J. Hanson Charles L. Lawson. *Solving Least Square Problems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974. 340 pages.
- [CM78] D.R. Cox and H.D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. Science Paperbacks, Chapman and Hall, London, 1978.
- [CM95] I.J.. Cox and M.L. Miller. On finding ranked assignments with application to multitarget tracking and motion correspondence. *IEEE Transactions on AES*, 31(1) :486–489, january 1995.
- [CMC85] Chee-Yee Chong, Shozo Mori, and Kuo-Chu Chang. Information fusion in distributed sensor networks. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 830–835, june 1985.
- [CMC90] Chee-Yee Chong, Shozo Mori, and Kuo-Chu Chang. Distributed multitarget multisensor tracking. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 8. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [CMC94] Kuo-Chu Chang, Shozo Mori, and Chee-Yee Chong. Evaluating a multiple-hypothesis multi-target tracking algorithm. *IEEE Trans. on AES*, 30(2) :578, april 1994.
- [CMF<sup>+</sup>84] Chee-Yee Chong, Shozo Mori, M.R. Fehling, Kuo-Chu Chang, and R. Wishner. Distributed hypothesis testing in distributed sensor network. Technical Report Interim Tech. rep. TR-1048-02, AIDS, July 1984.

- [CMTW82] Chee-Yee Chong, Shozo Mori, Edison Tse, and R. Wishner. A general theory for bayesian multitarget tracking and classification- gtc. Technical Report Tech. rep. TR-1015-1, AIDS, december 7th 1982.
- [CMTW86] Chee-Yee Chong, Shozo Mori, Edison Tse, and R. Wishner. Tracking and classifying multiple targets without a prior identification. *IEEE Trans. on AC*, 31(5) :401–409, 1986.
- [Col86] S.B. Colegrove. A new approach to multitarget tracking using probabilistic data association. Technical Report Tech. Rep. NO ERL-0381-TR, Defence Science and Technology Organization, Australia, september 1986.
- [Col87] S.B. Colegrove. Multitarget tracking in a cluttered environment. In *Proceedings of ISSPA 87*, pages 307–314, Brisbane, Australia, August 24th-28th 1987.
- [Col91] S.B. Colegrove. A unified pda tracking filter with initiation, nearest neighbours and nonuniform clutter. In *Workshop paper*, pages 1–13, 1991.
- [CPB82] Y.T. Chan, J.B. Plant, and J.R.T. Bottomley. A kalman tracker with a simple input estimators. *IEEE Transactions on AES*, 18 :235–240, 1982.
- [Cri96] Dan Ovidiu Crisan. *The Problem of Nonlinear Filtering*. PhD dissertation, University of Edinburgh, Edinburgh, july 1996.
- [CS93] D.C. Cowley and B. Shafai. Registration in multi-sensor data fusion and tracking. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 875–879, San Francisco, CA, june 1993.
- [CT84] C.B. Chang and J.A. Tabaczynski. Application of state estimation fto target tracking. *IEEE Transactions on AC*, 29(2) :98–109, 1984.
- [CT85] D.A. Castanon and D. Tenektzis. Distributed estimation algorithm for nonlinear systems. *IEEE Transactions on AC*, 30 :418–425, may 1985.
- [CTF95] Emmanuel Cassassolles, Bernard Tomasini, and Gérard Favier. Controlling an ever-expanding tree : Towards a practical version of the multiple hypothesis filter. In *Proceedings of the 1995 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 600–605, 1995.
- [CV86] Z. Chair and Pramod K. Varshney. Optimal data fusion in multiple-sensor detection systems. *IEEE Transactions on AES*, 22(1) :98–101, 1986.
- [CW90] I.J.. Cox and G.T. Wilfong. *Autonomous Robots Vehicles*. Springer Verlag, New York, 1990.
- [Dah93] S. Dahr. Application of recursive method for registration error correction in tracking with multiple sensors. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 869–874, San Francisco, CA, june 1993.
- [Dan90] M.P Dana. Multiple sensor registration : A prerequisite for multisensor tracking. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 5. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.

- [Dau92] Fred Daum. A system approach to multiple target tracking. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 6. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [DB93] B.A. Van Doorn and Henk A. P. Blom. Systematic error estimation in multisensor fusion systems. In Oliver Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 450–461, 1993.
- [DBC<sup>+</sup>01] Jean Dezert, D. Blair, C.Y. Chong, P. Willett, K.C. Chang, X.R. Li, and T. Kirubarajan. Everything you always wanted to know about professor bar-shalom. In *Proceedings of the Workshop on Estimation, Tracking and Fusion : A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, may 17 2001.
- [DBP90] Oliver E. Drummond, Samuel S. Blackman, and G.C. Petrisor. Tracking clusters of extended objects with multiple sensors. In *Proceedings of the 1990 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1305, pages 362–371, april 1990.
- [DBS93] Jean Dezert and Yaakov Bar-Shalom. Joint probabilistic data association for autonomous navigation. *IEEE Transactions on AES*, 29(4) :1275–1286, october 1993.
- [DBS98] E. Daeipour and Yaakov Bar-Shalom. Imm for tracking maneuvering targets in the presence of glint. *IEEE Transactions on AES*, 34, july 1998.
- [DBSL94] E. Daeipour, Yaakov Bar-Shalom, and Xiao Rong Li. Adaptive beam pointing control of a phased array radar using an imm estimator. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, pages 2093–2097, Baltimore, Maryland, june 1994.
- [dCC95] Himilcon de Castro Carvalho. *Filtrage Optimal Non-Linéaire du Signal GPS NAVSTAR en recalage de centrales de navigation*. PhD dissertation, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace (ENSAE), Toulouse, France, september 15th 1995. 164 pages.
- [DCL80] E. Drakopoulos, J.J. Chao, and C.C. Lee. Further comments on applications of 0-1 integer programming to multitarget tracking problem. *IEEE Trans. on AC*, 25(4) :856, august 1980.
- [DCL92] E. Drakopoulos, J.J. Chao, and C.C. Lee. A two level distributed multiple hypothesis decision system. *IEEE Trans. on AC*, 37(2) :380–384, 1992.
- [DD96] M.P Dana and J.L. Dana. System-level track fusion for command and control. *AGARDograph 337 : Multi-sensor Multi-Target Data Fusion, Tracking and Identification Techniques for Guidance and Control Applications*, pages 130–146, october 1996.
- [Deb93] Somnath Deb. A relaxation algorithm for the passive sensor data association problem. M.S. dissertation, University of Connecticut, Storrs, CT, 1993.
- [Deb94] Somnath Deb. *Multisensor-Multitarget Data Association for Tracking*. PhD dissertation, University of Connecticut, Storrs, CT, 1994. 91pages.

- [Del97] Jean-Pierre Delmas. An equivalence of the em and ice algorithm for exponential family. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(10) :2613–2615, october 1997.
- [Dem40] W. Edwards Deming. *Facsimiles of two papers by Bayes*. The Graduate School, The Department of Agriculture, Washington, DC, 1940. 131 pages.
- [Dev86] Luc Devroye. *Non-Uniform Random variate Generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Dez88] Jean Dezert. Poursuite multi-cibles mono-senseur : Analyse des principales approches développées dans le domaine. Technical Report Technical Note 1988-10, Onera, Châtillon, France, 1988.
- [Dez90] Jean Dezert. *Vers un Nouveau Concept de Navigation Autonome d'Engin. Un lien entre le Filtrage à Association Probabiliste de Données et la Théorie de l'Evidence*. PhD dissertation, Université Paris-Sud, Orsay, France, September 27th 1990.
- [Dez92] Jean Dezert. Autonomous navigation with uncertain reference points using the pdaf. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 9. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [Dez93] Jean Dezert. *Introduction au Filtrage de Kalman*. Short Course Notes - University of Orléans, Orléans, France, 1993. Réédité en 1998-2002.
- [Dez98] Jean Dezert. Tracking maneuvering and bending extended target in cluttered environment. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 3373, Orlando, FL, april 1998.
- [Dez99a] Jean Dezert. Improvement of strapdown inertial navigation using landmark detections and pdaf. *IEEE Trans. on AES*, 1999.
- [Dez99b] Jean Dezert. Pistage multi-senseurs de cible occasionnellement occultée en milieu urbain. In *Actes du Colloque Gretsi*, Vannes, France, september 13-17 1999.
- [Dez01a] Jean Dezert. On the coherence of jpdaf formulation based on diffuse prior. In *Proceedings of the Workshop on Estimation, Tracking and Fusion : A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, may 17 2001.
- [Dez01b] Jean Dezert. Optimal bayesian fusion of multiple unreliable classifiers. In *Proceedings of Fourth Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2001)*, Montréal, Canada, august 2001.
- [Dez02a] Jean Dezert. Ballistic track initialization from a bisatellite surveillance imaging system. In *Proceedings of Fifth Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2002)*, Annapolis, MD, USA, july 2002.
- [Dez02b] Jean Dezert. Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning. In *Proceedings of NMA 2002 Conference (Invited paper)*, Bulgaria, august 2002.

- [Dez02c] Jean Dezert. Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning. *to appear in International Journal of Information and Security, T. Semerdjiev Ed., Bulg. Acad. of Sciences, Sofia, Bulgaria*, 5(4), 2002.
- [DF94] Fred Daum and Robert J. Fitzgerald. The importance of resolution in multiple target tracking. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 2235, pages 329–335, 1994.
- [DL98] Jean Dezert and Xiao Rong Li. Layered multiple-model algorithm with application to tracking maneuvering and bending extended target in clutter. In *Proceedings of First Int. Fusion Conference (Fusion'98)*, Las Vegas, july 1998.
- [DLL98] Jean Dezert, Ning Li, and Xiao Rong Li. Theoretical development of an integrated jpdaf for multitarget tracking in clutter. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [DLR77] Arthur P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *J. Royal Statistical Society*, 39 :1–38, 1977.
- [DM91] François Dufour and Michel Mariton. Tracking a 3d maneuvering target with passive sensors. *IEEE Transactions on AES*, 27, july 1991.
- [DM92] François Dufour and Michel Mariton. Passive sensor data fusion and maneuvering target tracking. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 3. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [DMPBS90] Somnath Deb, R. Mallubhatla, Krishna R. Pattipati, and Yaakov Bar-Shalom. A multisensor multitarget data association algorithm for tracking. In *Proceedings of the IEEE Inter. Conf. on Systems Engineering*, Pittsburgh, 1990.
- [DN93] R. Danchick and G.E. Newman. A fast method for finding the exact n-best hypotheses for multitarget tracking. *IEEE Transactions on AES*, 29(2) :555–560, april 1993.
- [DPBS90] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, and Yaakov Bar-Shalom. Passdat : Passive sensor data association filtering for tracking : A pc software. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, Orlando, FL, april 1990.
- [DPBS92a] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, and Yaakov Bar-Shalom. A multisensor-multitarget data association algorithm for heterogeneous sensors. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1992.
- [DPBS92b] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, and Yaakov Bar-Shalom. An s-dimensional assignment algorithm for track initiation. In *Proceedings of the IEEE Inter. Conf. on Systems Engineering*, pages 527–530, Kobe, Japan, september 1992.

- [DPBS93] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, and Yaakov Bar-Shalom. A multisensor-multitarget data association algorithm for heterogeneous sensors. *IEEE Transactions AES*, 29(2) :560–568, april 1993.
- [DPBST92] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, Yaakov Bar-Shalom, and Haralampos Tsaknakis. A new algorithm for the generalized assignment problem. In *Proceedings of IEEE Intern. Conf. on Systems Man and Cybernetics*, pages 249–254, Chicago, october 1992.
- [DPBSW89] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, Yaakov Bar-Shalom, and Robert B. Washburn. Assignment algorithms for the passive sensor data association problem. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1096, pages 231–243, Orlando, FL, march 1989.
- [DPBSY94] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati, Yaakov Bar-Shalom, and Murali Yeddanapudi. A generalized s-dimensional assignment algorithm for multisensor multitarget state estimation. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, december 1994.
- [DR75] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, 1975.
- [DR80] J.V. DiFranco and W.L. Rubin. *Radar Detection*. Artech House, Dedham, MA, 1980.
- [DRBB90] G.C. Demos, R.A. Ribas, T.J. Broida, and Samuel S. Blackman. Application of mht to dim moving targets. In *Proceedings of the 1990 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1305, 1990.
- [Dru75] Oliver E. Drummond. *Multiple-Object Estimation*. PhD dissertation, University of California - UCLA, Los Angeles, CA, 1975. Xerox University Microfilms No. 75-26,954.
- [Dru87a] Oliver E. Drummond. Multiple target tracking. In *Lectures Notes - Hughes Aircraft Company*, El Segundo, CA, 1987.
- [Dru87b] Oliver E. Drummond. Multiple target tracking lectures notes. In *UCLA 1985, technology Training Corp*, Torrance, CA, 1987.
- [Dru93a] Oliver E. Drummond. Multiple sensor tracking with retrospective probabilistic data association. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 885–889, San Francisco, CA, 1993.
- [Dru93b] Oliver E. Drummond. Multiple target tracking with multiple frame probabilistic data association. In Oliver Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 394–407, 1993.
- [DS83] J.E. Jr. Dennis and R.B. Scnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [EK86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processes, Characterization and Convergence*. Wiley - Series in Probability and Statistics, New York, 1986.

- [Fau71] P. Faurre. *Navigation Inertielle Optimale et Filtrage Particulaire*. Editions Dunod, Paris, 1971.
- [Fau79] R. Faure. *Précis de Recherche Opérationnelle*. Editions Dunod, Paris, 1979. 4ième Edition.
- [Fav82] Gérard Favier. *Filtrage, Modélisation et Identification de Systèmes Linéaires Stochastiques à Temps Discret*. Editions du CNRS, Paris, 1982. 426 pages.
- [FB79] Thomas E. Fortmann and Baron. Problems in multitarget sonar tracking. In *Proceedings of the 1978 IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, january 1979.
- [FBSS80] Thomas E. Fortmann, Yaakov Bar-Shalom, and Molly Scheffe. Multitarget tracking using joint probabilistic data association. In *Proceedings of the 1980 IEEE Conf. on Decision and Control*, Albuquerque, NM, december 1980.
- [FBSS83] Thomas E. Fortmann, Yaakov Bar-Shalom, and Molly Scheffe. Sonar tracking of multiple targets using joint probabilistic data association. *IEEE Journal of Oceanic Engineering - OE*, 8(3) :173–184, july 1983.
- [FBSSG81] Thomas E. Fortmann, Yaakov Bar-Shalom, Molly Scheffe, and Saul Gelfand. Detection thresholds for for multitarget tracking in clutter. In *Proceedings of the 1981 IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1401–1408, San Diego, CA, 1981.
- [FBSSG85] Thomas E. Fortmann, Yaakov Bar-Shalom, Molly Scheffe, and Saul Gelfand. Detection thresholds for tracking in clutter - a connection between estimation and signal processing. *IEEE Trans. on AC*, 30(2) :221–229, march 1985.
- [FC89] J.L. Fisher and D.P. Casasent. Fast jpda multitarget tracking algorithm. *Applied Optics*, 28(2) :371–376, january 15th 1989.
- [FD91] B.E. Fridling and Oliver E. Drummond. Performance evaluation methods for multiple target tracking algorithms. In *Proceedings of the 1991 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1481, pages 371–379, april 1991.
- [Fer67] T.S. Ferguson. *Mathematical Statistics*. Academic Press, New York, 1967.
- [FH77] Thomas E. Fortmann and Konrad L. Hitz. *An Introduction to Linear Control Systems*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977. 744 pages.
- [FH93] J.A. Fessler and A.O. Hero. Complete data space and generalized em algorithms. In *Proceedings of ICASSP*, volume 4, pages 1–4, 1993.
- [Fit80] Robert J. Fitzgerald. Simple tracking filters : Steady state filtering and smoothing performance. *IEEE Trans. on AES*, 16(6) :860–864, november 1980. (Cf correction Vol. AES 17, No 2, March 1981, p. 305).
- [Fit81a] Robert J. Fitzgerald. Correction to simple tracking filters. *IEEE Trans. on AES*, 17(2) :305, march 1981.

- [Fit81b] Robert J. Fitzgerald. Simple tracking filters : Closed form solutions. *IEEE Trans. on AES*, 17(5) :781–785, november 1981.
- [Fit82] Robert J. Fitzgerald. Simple tracking filters : Positions and velocity measurements. *IEEE Trans. on AES*, 18 :531–537, september 1982.
- [Fit85] Robert J. Fitzgerald. Track biases and coalescence with probabilistic data association. *IEEE Trans. on AES*, 21(6) :822–825, november 1985.
- [Fit86] Robert J. Fitzgerald. Development of practical pda logic for multitarget tracking by microprocessor. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 889–898, Seattle, WA, june 1986.
- [Fit90] Robert J. Fitzgerald. Development of practical pda logic for multitarget tracking by microprocessor. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 1. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [FJ89] J.T. Fagarasan and R. Jakaub. Automatic radar/ir/esm track association with application to ship self defense. In *Proceedings of 1989 Tri-Service Data Fusion Symposium*, may 1989.
- [FK87] W. Fleskes and G. Van Keuk. On single target tracking in dense clutter environment. In *Proceedings of IEE International Radar Conference*, 1987.
- [FKN90] K.T. Fang, S. Kotz, and K.W. Ng. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall, New York, 1990.
- [FMC80] W.L. Fischer, C.E. Muehe, and A.G. Cameron. Registration errors in a netted surveillance system. Technical Report Technical Report 1980-40, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, september 1980.
- [FP78] Alfonso Farina and Pardini. Track while scan algorithm in a clutter environment. *IEEE Transactions on AES*, 14(15) :769–779, 1978.
- [Fri73] Benjamin Friedland. Optimum steady state position and velocity estimation using noisy sampled position data. *IEEE Trans. on AES*, 9(6) :906–911, november 1973. (correction in Vol AES-11, No 4, July 1975, p.675).
- [Fri89] B.E. Fridling. Overview of tracking methods. *J. of SDI Panels on Tracking*, 5 :17–36, 1989.
- [FS85] Alfonso Farina and F.A. Studer. *Radar Data Processing*, volume 1. John Wiley, New York, 1985.
- [Gau81a] Michel Gauvrit. Analyse d’algorithmes de poursuite multi-cibles multi-senseurs. Technical Report Rapport bibliographique no 1/7257 Dera, Centre d’Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Toulouse, France, january 1981.
- [Gau81b] Michel Gauvrit. Analyse d’algorithmes de poursuite multi-cibles multi-senseurs. Technical Report Rapport intermédiaire no 2/7257 Dera, Centre d’Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Toulouse, France, august 1981.

- [Gau82a] Michel Gauvrit. Analyse d'algorithmes de poursuite multi-cibles multi-senseurs. Technical Report Rapport de synthèse finale no 3/7257 Dera, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Toulouse, France, february 1982.
- [Gau82b] Michel Gauvrit. Analyse d'algorithmes de poursuite multi-cibles multi-senseurs. Technical Report Annexe technique no 4/7257 Dera, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Toulouse, France, february 1982.
- [Gau82c] Michel Gauvrit. *Performances des Estimateurs Bayésiens en boucle ouverte et fermée. Dualité : Identification-Commande*. PhD dissertation, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, june 1982.
- [Gau84] Michel Gauvrit. Bayesian adaptive filtering for tracking with measurements of uncertain origin. *Automatica*, 20(2) :217–224, march 1984.
- [Gau97] Hervé Gauvrit. *Extraction Multi-Pistes : Approche Probabiliste et Approche Combinatoire*. PhD dissertation, Université de Rennes 1, Rennes, France, november 21th 1997. 164 pages.
- [GBC98] Marc Gelgon, Patrick Bouthemy, and Jean-Pierre Le Cadre. A pmht-based approach to associating and estimating trajectories of multiple moving regions in a video analysis context. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [GCJ97] Hervé Gauvrit, Jean-Pierre Le Cadre, and Claude Jauffret. A formulation of multitarget tracking as an incomplete data problem. *IEEE Transactions on AES*, 33(4) :1242–1257, october 1997.
- [Gel74] Arthur Gelb. *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1974. 374 pages.
- [Geo74] A.M. Geoffrion. Lagrangian relaxation for integer programming. In M.L. Balinski, editor, *Mathematical Programming Study 2 : Approaches to Integer Programming*, chapter 8. North Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1974.
- [GFB84] Saul Gelfand, Thomas E. Fortmann, and Yaakov Bar-Shalom. Adaptive detection threshold optimization for tracking in clutter. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 619–624, San Diego, CA, 1984.
- [GGMS74] P.E. Gill, G.H. Golub, W. Murray, and M.A. Saunders. Methods for modifying matrix factorizations. *Mathematics of Computation*, 28(126) :505–535, april 1974.
- [GH88] K.G. Gilbertrand and R.B. Hofstra. *Multidimensional Assignment Problems*, volume 19. Decision Sciences, 1988.
- [GHRPS90] A.E. Gelfand, S.E. Hills, A. Racine-Poon, and A.F.M. Smith. An illustration of bayesian inference in normal data models using gibbs. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85 :972–985, 1990.

- [Gia98] Evangelos Giannopoulos. Multi sensor track association in clutter using pmht. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [Gil91] J.T. Gillis. Computation of the circular error probability integral. *IEEE Trans. on AES*, 27 :906–910, november 1991.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H Freeman and Company, San Francisco, CA, 1979.
- [GJC95] Hervé Gauvrit, Claude Jauffret, and Jean-Pierre Le Cadre. Extraction de pistes multiples dans le contexte du sonar passif. In *Proceedings of Colloque GRETSI*, pages 957–960, Juan Les Pins, France, September 18-21th 1995.
- [GJC98] Hervé Gauvrit, Claude Jauffret, and Jean-Pierre Le Cadre. Combinatorial optimization for initialization of probabilistic approaches. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [GK98] Douglas A. Gray and Mark L. Krieg. Recursive least squares and kalman filtering approaches to estimating and tracking the parameters of mixture models. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [GL83] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1983.
- [GM77] Norman.H. Gholson and Richard L. Moose. Maneuvering target tracking using adaptive state estimation. *IEEE Transactions on AES*, 13(3) :310–317, may 1977.
- [GM98] Olivier Grondin and Christian Musso. Strategy for radar pulse allocation applied to multitarget tracking by metaheuristics. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [GMN97a] I.R. Goodman, R.P.S. Mahler, and H.T. Nguyen. *Mathematics of Data Fusion*. Kluwer, 1997.
- [GMN97b] John Goutsias, Ronald P.S. Mahler, and Hung T. Nguyen. *Random Sets : Theory and Applications*. Springer Verlage, IMA Vol. 97, 1997.
- [GMW81] P.E. Gill, W. Murray, and M.H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, New York, 1981.
- [Gol85] D. Goldfarb. Efficient dual simplex algorithm for the assignment problem. *Mathematical Programming*, 33 :187–203, 1985.
- [Gol89] D.E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison Wesley, New York, 1989.

- [Goo86] I.R. Goodman. Pact : An approach to combining linguistic-based and probabilistic information in correlation and tracking. Technical Report Tech. Doc. 878, Naval Ocean Systems Center, San Diego, CA, march 1986.
- [Gro94] W. Grossman. Bearings-only tracking : A hybrid coordinate system approach. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17(3) :451–457, may-june 1994.
- [GS90] A.E. Gelfand and A.F.M. Smith. Sampling based approaches to calculating marginal densities. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85 :398–409, 1990.
- [GSS92] Neil L. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings-F*, 104(2), october 1992.
- [Gué94] Yves Guézengar. *Radar Tracking in Cluttered Environment applied to Adaptive Phased Array Radar*. PhD dissertation, Nantes University, Nantes, France, november,16th 1994.
- [Gué96] Yves Guézengar. Nouvelle formulation des équations du filtre à association probabiliste de données. *Revue Traitement du Signal*, 13(2) :167–176, 1996.
- [Gui77] Guilbert. *Etude et Comparaison de 4 Algorithmes de réalisation Stochastique*. PhD dissertation, Université d'Aix-Marseille 3, Aix/Marseille, France, may 1977. (Thèse de 3ième cycle).
- [Gui78] B.W. Guimond. Joint estimation and adaptive identification for systems with unknown inputs. In *Proceedings of 13th Asilomar Conference*, november 1978.
- [Hal70] J.H. Halton. A retrospective and prospective survey of the monte carlo method. *SIAM Review*, 12(1) :1–63, 1970.
- [Hal92] D.L. Hall. *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*. Artech House, Boston, MA, 1992.
- [Has89] J.C. Hassab. *Underwater Signal and Data Processing*. CRC Press, 1989.
- [HBS87] Alain Houles and Yaakov Bar-Shalom. Algorithmes de poursuite multi-senseurs en présence de fausses alarmes. In *Proceedings of the 11th Colloque GRETSI*, pages 1101–104, Nice, France, 1987.
- [HBS89] Alain Houles and Yaakov Bar-Shalom. Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter. *IEEE Trans. on AES*, 25(4) :176–188, 1989.
- [Hei88] H.A. Heidary. Deghosting in passive multi-sensors systems. In *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications, Y. Bar-Shalom Coordinator*, january 1988.
- [HF99] T. J. Ho and M. Farooq. An efficient method for uniformly generating poisson-distributed number of measurements in a validation gate. In *Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion'99)*, pages 749–754, Sunnyvale, CA, USA, july 6-8 1999.
- [Hig89] N.J. Higham. Analysis of the cholesky decomposition of a semi-definite matrix. In M.G. Cox and S.J. Hammarling, editors, *Reliable Computations*. Oxford Press, New York, 1989.

- [Hin76] W.G.S. Hines. A simple monitor of a system with sudden parameter changes. *IEEE Trans. on IT*, 22(2) :210–216, march 1976.
- [HJ85] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1985.
- [HL93] L. Hong and A. Lynch. Recursive temporal-spatial information fusion with applications to target identification. *IEEE Trans. on AES*, 29(2) :435–445, april 1993.
- [Hou75] A. Householder. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover, New York, 1975.
- [HR93] R.E. Helmick and T.R. Rice. Removal of alignment in an integrated system of two 3d sensors. *IEEE Trans. AES*, 29(4) :1333–1343, october 1993.
- [HS78] E. Horowitz and S. Sahni. *Fundamentals of Computer Algorithms*. Computer Science Press, Rockville, MD, 1978.
- [Hut95] D. Hutber. *Suivi Multi-Capteurs de Cibles Multiples en Vision par Ordinateur, appliqué à un véhicule dans un Environnement Routier*. PhD dissertation, Université Nice-Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France, 1995.
- [HW59] J.S. Hicks and R.F. Wheeling. An efficient method for generating uniformly distributed points on the surface of an n-dimensional sphere. *Comm. of the ACM*, 2(4) :17–19, 1959.
- [IM65] K. Ito and H.P. McKean. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Academic Press, New York, 1965.
- [Jaz70] Andrew H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*, volume 64 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, 1970.
- [JBS72] A.G. Jaffer and Yaakov Bar-Shalom. On optimal tracking in multitarget environments. In *Proceedings of 3rd Symposium on Non Linear Estimation*, pages 112–117, Univ. of Calif., San Diego, CA, september 1972.
- [JBS90] Claude Jauffret and Yaakov Bar-Shalom. Track formation with bearing and frequency measurements in the presence of false detection. *IEEE Trans. on AES*, 26(6) :999–1010, 1990.
- [JD87] A.K. Jain and R.C. Dubes. *Algorithms for Clustering Data*. Advanced Reference Ser. Prentice-Hall, New York, 1987.
- [JD99a] T. Kirubarajan Jean Dezert. Performance evaluation of a 2/2xm/n logic for track formation in clutter using a bi-band imaging sensor. In *IEE Target Tracking Colloquium*, London, UK, november 11-12 1999.
- [JD99b] Xiao Rong Li Jean Dezert, Ning Li. A new formulation of ipdaf for tracking in clutter. In *Proceedings of European Control Conference (ECC99)*, Karlsruhe, Germany, september 1999.
- [JD00] T. Kirubarajan Jean Dezert. Track formation in clutter using a bi-band imaging sensor. In *Proceedings of Third Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2000)*, Paris, France, july 2000.

- [JD01] Christian Musso Jean Dezert. An efficient method for generating points uniformly distributed in hyperellipsoids. In *Proceedings of the Workshop on Estimation, Tracking and Fusion : A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, may 17 2001.
- [Jef89] T.W. Jefferey. Track quality estimation for multiple-target tracking radars. In *Proceedings of the IEEE 1989 National Radar Conference*, pages 76–79, Dallas, TX, 1989.
- [JG71a] A.G. Jaffer and S.C. Gupta. Optimal sequential estimation of discrete processes with markov interrupted observations. *IEEE Trans. on AC*, pages 471–475, october 1971.
- [JG71b] A.G. Jaffer and S.C. Gupta. Recursive bayesian estimation with uncertain observation. *IEEE Trans. on IT*, 17 :614–616, september 1971.
- [JML98] V.P. Jilkov, L.S. Michaylova, and Xiao Rong Li. An alternative imm solution to benchmark radar tracking problem. In *Proceedings of First Int. Fusion Conference (Fusion'98)*, pages 924–929, Las Vegas, july 1998.
- [JR77] M. E. Johnson and J. S. Ramberg. Elliptically symmetric distributions : Characterizations and random variate generation. In *A.S.A. Proc. Statist. Comp. Sect.*, pages 262–265, 1977.
- [JV78] R. Jonker and A. Volgenant. A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems. *Proceedings 3, Pergamon, Oxford*, pages 79–102, 1978.
- [JV87] R. Jonker and A. Volgenant. A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems. *Computing*, 38 :327–340, 1987.
- [Kai67] Thomas Kailath. The divergence and battacharya measures in signal selection. *IEEE Trans. of Comm. Techn. and Com.*, 15 :52–60, february 1967.
- [Kal60a] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. of ASME, J. of Basic Engineering*, 82 :34–45, march 1960.
- [Kal60b] R.E. Kalman. New methods and results in linear prediction and filtering theory. Technical Report Tech. Rep. 61-1, Research Institut for Advanced Studies, Baltimore, MD, november 1960.
- [Kan70] Allen J. Kanyuck. Transient response of tracking filters with randomly interrupted data. *IEEE Trans. on AES*, 6 :313–323, may 1970.
- [Kar80] R.M. Karp. An algorithm to solve the mxn assignment problem in expected time  $O(mn\log n)$ . *Networks*, 10 :143–152, 1980.
- [KB61] R.E. Kalman and R. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. of ASME, J. of Basic Engineering*, 83 :95–108, march 1961.
- [KB72] P.G. Kaminski and A.E. Bryson. Discrete square-root filtering : A survey of current techniques. *IEEE Trans. on AC*, 16(6) :727–735, 1972.

- [KB93] G. Van Keuk and Samuel S. Blackman. On phased array radar tracking and parameter control. *IEEE Trans. on AES*, 29(1), january 1993.
- [KBSBW99] T. Kirubarajan, Yaakov Bar-Shalom, W.D. Blair, and G.A. Watson. Immpda solution to benchmark for radar ressource allocation and tracking in the presence of ecm. *to appear in IEEE Transactions on AES*, 1999.
- [KE96] David J. Kershaw and Robin J. Evans. A contribution to performance prediction for probabilistic data association tracking filters. *IEEE Trans. on AES*, 32(3) :1143–1148, july 1996.
- [KE97] David J. Kershaw and Robin J. Evans. Waveform selective probabilistic data association. *IEEE Trans. on AES*, 33(4) :1180–1188, october 1997.
- [Ken90] R. Kenefic. Active sonar application of a u-d square-root pdaf. *IEEE Trans. on AES*, 26(5) :850–858, september 1990.
- [Ker94] David J. Kershaw. *Adaptive Waveform Selection for Tracking Systems*. PhD dissertation, Royal Melbourne Institute of Technology, Victoria, Australia, 1994.
- [Keu77] G. Van Keuk. Adaptive computer controlled target tracking with a pased array radar. In *Proceedings of IEEE Radar Intern. Radar Conference*, pages 429–434, april 1977.
- [Keu95] G. Van Keuk. Multi-hypothesis tracking with electronically scanned radar. *IEEE Trans. on AES*, 31(3) :916–, july 1995.
- [Keu96] G. Van Keuk. Multihypothesis tracking using incoherent signal-strength information. *IEEE Trans. on AES*, 32(3), july 1996.
- [KK97] W. Koch and G. Van Keuk. Multiple hypothesis track maintenance with possibly unresolved measurements. *IEEE Trans. on AES*, 33(3) :883, 1997.
- [KMR73] J.D. Kendrick, Peter S. Maybeck, and J.G. Reid. Estimation of aircraft target motion using orientation measurements. *IEEE Trans. on AES*, 9(2) :254–259, 1973.
- [Koc95] W. Koch. Bayesian mht for well separated targets in densly clutter environment. In *Proceedings of IEE International Radar Conference*, 1995.
- [Kol50] A.N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, New York, 1950. 71 pages.
- [KS98] P. Korpisaari and J. Saarinen. Reinforcement learning method for attribute fusion in multiple hypothesis tracking. In *Proceedings of 1st Int. Fusion Conference*, Las Vegas, July 1998.
- [Kuh55] H.W. Kuhn. The hungarian method for the assignement problem. *Naval Res. Logist. Qurt*, 3 :253–258, 1955.
- [Kum93] Anil Kumar. *Passive Array Processing for Tracking : Delay Estimation for Accoustic Sensors and Clustering for Imaging Sensors*. PhD dissertation, University of Connecticut, Storrs, CT, 1993. 110 pages.

- [Kur90] Thomas Kurien. Issues in the design of practical multitarget tracking algorithms. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 3. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [KV86] P.R. Kumar and P. Varaiya. *Stochastic Processes*. Prentice-Hall, 1986.
- [KW85] Thomas Kurien and Robert B. Washburn. Multi-object tracking using passive sensors. In *Proceedings of 1985 American Control Conference*, pages 1032–1038, 1985.
- [Lai74] Demetrios G. Lainiotis. *Estimation Theory*. American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1974. 527 pages.
- [Lai76] Demetrios G. Lainiotis. Partitioning : A unifying framework for adaptive systems. In *Proceedings of the IEEE*, volume 64, pages 1126–1143, 1976.
- [Lai93] N. Laird. The em algorithm. In C.R. Rao, editor, *Handbook of Statistics*, volume 9. Elsevier, New York, 1993.
- [Law78] J. Lawson. An elementary theory of surveillance. Technical Report Technical Report, Naval Electronics System Command, august 1978.
- [LAZ63] Charles A. Desoer Lotfi A. Zadeh. *Linear System Theory : The State Space Approach*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1963. 613 pages.
- [LBS90a] Donald Lerro and Yaakov Bar-Shalom. Automated tracking with target amplitude information. In *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, pages 2875–2880, San Diego, CA, june 1990.
- [LBS90b] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Stability evaluation and track life of the pdaf for tracking in clutter. In *Proceedings of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2264–2269, Honolulu, HI, december 1990.
- [LBS91a] Donald Lerro and Yaakov Bar-Shalom. Interacting multiple model with target amplitude feature. *IEEE Transactions on AC*, 36(5), may 1991.
- [LBS91b] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Effectivness of the likelihood function in logic-based track formation. *IEEE Trans. on AES*, 27(1) :184–190, january 1991.
- [LBS91c] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Stability evaluation and track life of the pdaf for tracking in clutter. *IEEE Trans. on AC*, 36(5) :588–602, may 1991.
- [LBS92a] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Detection threshold selection for tracking performance optimization. In *Proceedings of the Conf. on Control and Command and Intelligence Techn. and Applications*, Utica, NY, june 1992.
- [LBS92b] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Performance prediction of the interacting multiple model algorithm. In *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, pages 2109–2113, Chicago, IL, june 1992.

- [LBS92c] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. A recursive multiple model approach to noise identification. In *Proceedings of the 1st IEEE Conf. on Control Applications*, pages 847–852, Dayton, OH, september 1992.
- [LBS93a] Donald Lerro and Yaakov Bar-Shalom. Interacting multiple model algorithm with target amplitude feature. *IEEE Transactions on AES*, 29(2) :494–509, april 1993.
- [LBS93b] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Design of an interacting multiple model algorithm for air traffic control tracking. *IEEE Transactions on CST*, 3 :186–194, september 1993.
- [LBS93c] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Performance prediction of the interacting multiple model algorithm. *IEEE Transactions on AES*, 29(3) :755–771, july 1993.
- [LBS94a] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Detection threshold selection for tracking performance evaluation. *IEEE Transactions on AES*, 30(3) :742–749, july 1994.
- [LBS94b] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. A hybrid conditional averaging technique for performance prediction of algorithms with continuous and discrete uncertainties. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1530–1534, Baltimore, Maryland, june 1994.
- [LBS94c] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Performance prediction of hybrid algorithms. In Cornelius T. Leondes, editor, *Control and Dynamic Systems : Advances in Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1994.
- [LBS94d] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Performance prediction of tracking in clutter with nearest neighbor filters. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 2235, Orlando, FL, 1994.
- [LBS94e] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. A recursive multiple model approach to noise identification. *IEEE Transactions on AES*, 30(3) :671–683, july 1994.
- [LBS96a] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Multiple-model estimation with variable structure. *IEEE Transactions on AC*, 41 :478–493, 1996.
- [LBS96b] Xiao Rong Li and Yaakov Bar-Shalom. Tracking in clutter with nearest neighbor filters : Analysis and performance. *IEEE Transactions on AES*, 32(3) :995–1010, july 1996.
- [LCVW83] B.C. Levy, D.A. Castanon, G.C. Verghese, and Alan S. Willsky. A scattering framework for decentralized estimation problems. *Automatica*, 19(4) :373–384, 1983.
- [LDW92] John J. Leonard and H.F. Durrant-Whyte. *Directed Sonar Sensing for Mobile Robot Navigation*. Kluwer Press, Boston, MA, 1992.
- [Leh83] E.L. Lehmann. *Theory of Point Estimation*. Wiley, New York, 1983.
- [Leo70] Cornelius T. Leondes. *Theory and Applications of Kalman Filtering*. AGARDograph 139, NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, 1970.

- [LF78] S.Y. Lu and K.S. Fu. A sentence-to-sentence clustering procedure for pattern analysis. *IEEE Transactions on SMC*, 8(5) :571–572, may 1978.
- [Li92a] S. Li. Matching : Invariant to translations, rotations and scale changes. *Pattern Recognition*, 25(6), 1992.
- [Li92b] Xiao Rong Li. Generation of random points uniformly distributed in hyperellipsoids. In *Proceedings of 1st IEEE Conf. Control Applications*, pages 654–658, Dayton, OH, september 1992.
- [Li92c] Xiao Rong Li. *Hybrid State Estimation and Performance Prediction with Applications to Air Traffic Control and Detection Threshold Optimization*. PhD dissertation, University of Connecticut, Storrs, CT, 1992.
- [Li93] Xiao Rong Li. The pdf of nearest neighbor measurement and probabilistic nearest neighbor filter for tracking in clutter. In *Proceedings of 32nd Conf. on Decision and Control*, pages 918–923, San Antonio, TX, december 1993.
- [Li96] Xiao Rong Li. Hybrid estimation techniques. In Cornelius T. Leondes, editor, *Control and Dynamic Systems : Advances in Theory and Applications*, volume 76, pages 213–287. Academic Press, New York, 1996.
- [Li97a] Ning Li. Development, analysis and design of intelligent probabilistic data association filter for target tracking in clutter. M.S. dissertation, New Orleans University, New Orleans, USA, 1997.
- [Li97b] Xiao Rong Li. Canonical transform for tracking with kinematic models. *IEEE Transactions on AES*, 33(4) :1212–1224, october 1997.
- [Li97c] Xiao Rong Li. Variable-structure hybrid estimation with application to target tracking. *Onera Seminar Slides*, august 13th 1997.
- [Li98a] Xiao Rong Li. Optimal selection of estimates for multiple-model estimation with uncertainty parameters. *IEEE Transactions on AES*, 34(2) :653–657, april 1998.
- [Li98b] Xiao Rong Li. Tracking in clutter with strongest neighbor measurements : I - theoretical analysis. *IEEE Transactions on AES*, december 1998.
- [Li99] Xiao Rong Li. *Probability, Random Signals, and Statistics*. CRC Press, 1999.
- [Lip82] L.R. Liporace. Maximum likelihood estimation for multivariate observations of markov sources. *IEEE Trans. on IT*, 28 :729–734, 1982.
- [LL83] Torsten Söderström Lennart Ljung. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, Series in Signal Processing, Cambridge, MA, 1983. 527 pages.
- [LL97] Xiao Rong Li and Ning Li. Intelligent pdaf : Refinement of ipdaf for tracking in clutter. In *Proceedings of the 29th Southeastern Symposium on System Theory*, pages 133–137, Cookeville, Tennessee, 1997.

- [LL98a] Ning Li and Xiao Rong Li. Target perceivability : An integrated approach to tracker analysis and design. In *Proceedings of First Int. Fusion Conference (FUSION'98)*, pages 174–181, Las Vegas, july 1998.
- [LL98b] Ning Li and Xiao Rong Li. Theoretical design of trackers for tracking probability enhancement. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, Orlando, FL, april 1998.
- [LL98c] Xiao Rong Li and Ning Li. Integrated real-time estimation of clutter density for tracking. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, Orlando, FL, april 1998.
- [IMDL40] M. le Marquis De Laplace. *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Bachelier, Imprimeur-Libraire, Paris, 1840. 259 pages.
- [LMSK63] J.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, and C. Karel. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*, 11 :972–989, 1963.
- [LNS82] G.S. Lauer and Jr. N.R. Sandell. Distributed detection with waveform observations : Correlated observation processes. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 812–819, june 1982.
- [Lou82] T.A. Louis. Finding the observed information matrix when using the em algorithm. *J. of the Royal Statistical Society*, 44(2) :226–233, 1982.
- [LS77] R.S. Lipster and A.N. Shirayev. *Statistics of Random Processes*. Springer Verlag, 1977.
- [LT94] Z. Luo and J.N. Tsitsiklis. Data fusion with minimal communication. *IEEE Trans. on IT*, 40(5) :1551–1563, september 1994.
- [Lue79] David G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979. 445 pages.
- [Lue89] David G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley, 1989.
- [LW66] E.L. Lawler and D.E. Wood. Branch-and-bound methods : A survey. *Operation Research*, 14 :699–719, 1966.
- [LW98] Tod Luginbuhl and Peter Willett. Tracking a general frequency modulated signal in noise. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [LZ96] Xiao Rong Li and X. Zhi. Psnf : A refined strongest neighbor filter for tracking in clutter. In *Proceedings of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996.
- [LZ98] Xiao Rong Li and Youmin Zhang. Multiple-model estimation with variable structure : Likely-model set algorithm. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 3373, Orlando, FL, april 1998.

- [LZ99] Xiao Rong Li and X. Zhi. Tracking in clutter with strongest neighbor measurements : II probabilistic strongest neighbor filter. *to appear in IEEE Transactions on AES*, 1999.
- [MABS85] R. Mucci, J. Arnold, and Yaakov Bar-Shalom. Track segment association with distributed field of sensors. *J. Acoustic. Soc. Amer.*, 78 :1317–1324, october 1985.
- [MABSD98] E. Mazor, A. Averbuch, Yaakov Bar-Shalom, and J. Dayan. Interacting multiple model methods in target tracking. *IEEE Transactions on AES*, 34 :103–123, january 1998.
- [Mag65] D.T. Magill. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes. *IEEE Transactions on AC*, 10(4) :434–439, october 1965.
- [Map89] W. Maples. Employment of pattern matching in multiple target tracking. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1096, 1989.
- [Mar79] Glenn D. Marcus. *Tracking with Measurements of Uncertain Origin and Random Arrival Times*. PhD dissertation, The University of Connecticut - UConn, Storrs, CT, 1979.
- [Mar86] Michel Mariton. *Les Systèmes Linéaires à Sauts Markoviens*. PhD dissertation, Université Paris Sud (Orsay), Orsay, France, december 1986.
- [Mar88] Michel Mariton. Systèmes hybrides : Commande, filtrage et applications. *Revue Scientifique et Technique de la Défense*, 1(1) :19–31, october 1988.
- [Mar90] Michel Mariton. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990. 299 pages.
- [Mas90] Michael K. Masten. Electromechanical systems for optical target tracking sensors. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 10. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [May76] Peter S. Maybeck. Failure detection without excessive hardware redundancy. In *Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronic Conference (NEACON)*, pages 315–322, Dayton, OH, may 1976.
- [May79] Peter S. Maybeck. *Stochastic Models, estimation and Control*, volume 1. Academic Press, New York, 1979. 423 pages.
- [May82a] Peter S. Maybeck. *Stochastic Models, estimation and Control*, volume 2. Academic Press, New York, 1982. 289 pages.
- [May82b] Peter S. Maybeck. *Stochastic Models, estimation and Control*, volume 3. Academic Press, New York, 1982. 291 pages.
- [MCC92] Shozo Mori, Kuo-Chu Chang, and Chee-Yee Chong. Performance analysis of optimal data association with applications to multiple target tracking. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-*

- Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 7. Artech House, Boston, MA, 1992.  
442 pages.
- [MCTW86] Shozo Mori, Chee Yee Chong, Edison Tse, and R.P. Wishner. Tracking and classifying multiple targets without a priori identification. *IEEE Trans. on AC*, 31 :401–409, may 1986.
- [MCWT83] Shozo Mori, Chee Yee Chong, R.P. Wishner, and Edison Tse. Multi-target multi-sensor tracking problems : A general approach. In *Proceedings of 1983 American Control Conference*, volume 2235, Orlando, FL, april 1983.
- [MD95] Christian Musso and Jean Dezert. Pistage et validation de piste par pdaf et reconnaissance. In *Proceedings of the Colloque GRETSI*, Juan Les Pins, France, september 1995.
- [ME91] D. Musicki and Robin J. Evans. Integrated probabilistic data association (ipda). Technical Report Tech. Rep. EE9144, Univ. of Newcastle, Newcastle, Australia, june 1991.
- [ME92] D. Musicki and Robin J. Evans. Tracking in clutter using probabilistic data association. In *Proceedings of Radar 92 Int. Conference*, pages 82–85, Brighton, United Kingdom, october 1992.
- [ME95] D. Musicki and Robin J. Evans. Integrated probabilistic data association - finite resolution. *Automatica*, 31(4) :559–570, 1995.
- [Med69] J.S. Meditch. *Stochastic Optimal Linear Estimation And Control*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1969. 394 pages.
- [Meh72a] Raman K. Mehra. Approaches to adaptive filtering. *IEEE Trans. on AC*, pages 693–698, october 1972.
- [Meh72b] Raman K. Mehra. On the identification of variances and adaptive kalman filtering. *IEEE Trans. on AC*, 15(2), april 1972.
- [MES92a] D. Musicki, Robin J. Evans, and S. Stankovic. Integrated probabilistic data association. In *Proceedings of 31st IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3796–3798, Tucson, AZ, december 16-18th 1992.
- [MES92b] D. Musicki, Robin J. Evans, and S. Stankovic. Integrated probabilistic data association (ipda). In *Proceedings of IEEE Workshop on Hidden Markov Models for Tracking*, Wirrina Cove Resort, South Australia, february 12-15th 1992.
- [MES94] D. Musicki, Robin J. Evans, and S. Stankovic. Integrated probabilistic data association. *IEEE Trans. on AC*, 39 :1237–1241, june 1994.
- [MG77] Richard L. Moose and Gholson. Maneuvering target tracking using adaptive stack estimation. *IEEE Transactions on AES*, 13(3), may 1977.
- [Mil64] K.S. Miller. *Multidimensional Gaussian Distributions*. John Wiley, New York, 1964.
- [Mil93] M.L. Miller. Implementation notes for mht with multiple target models. *Princeton, NJ : NEC Research Inst.*, 1993.

- [Mit90] James H. Mitzel. Multitarget tracking applied to automatic target recognition with an imaging infrared sensor. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 9. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [MJH81] Peter S. Maybeck, R.L. Jensen, and D.A. Harnby. An adaptive extended kalman filter for target image tracking. *IEEE Trans. on AES*, 17 :173–180, march 1981.
- [MLC97] Bradley A. Moran, John J. Leonard, and Chrysostomos Chrysostomidis. Curved shape reconstruction using multiple hypothesis tracking. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 22(4) :625–638, october 1997.
- [MM80] Peter S. Maybeck and D.E. Mercier. A target tracker using spatially distributed ir measurements. *IEEE Trans. on AC*, 25 :222–225, april 1980.
- [MO78] C.E. Muehe and R.M. O'Donnell. Automating radars for air traffic control. In *Proceedings of ELECTRO'78*, Boston, MA, may 1978.
- [Moo73] Richard L. Moose. Adaptive estimator for passive range and depth determination of a maneuvering target (u). *U.S. Naval Journ. of Underwater Acoustics*, july 1973.
- [Moo75] Richard L. Moose. An adaptive state estimation solution to the maneuvering target problem. *IEEE Transactions on AC*, pages 359–362, june 1975.
- [Mor74] Charles L. Morefield. Solution of multiple choice estimation problems via 0-1 integer programming. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 753–754, november 1974.
- [Mor75a] Charles L. Morefield. Efficient computational forms for bayesian multitarget tracking. Technical Report Tech. Rep. TR-D075 (5085-10)-1, Aerospace Corporation, april 16th 1975.
- [Mor75b] Charles L. Morefield. Efficient computational forms for bayesian multitarget tracking. In *Proceedings of 6th Symposium on Nonlinear Estimation Theory and Its Applications*, pages 208–216, september 1975.
- [Mor76] Charles L. Morefield. Applications of the illiac iv parallel processor to multitarget tracking. In *Proceedings of 10th Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Computers*, november 1976.
- [Mor77] Charles L. Morefield. Application of 0-1 integer programming to multi-target tracking problems. *IEEE Transactions on AC*, 22 :302–312, june 1977.
- [Mor78] Charles L. Morefield. Decision directed multitarget tracking. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1195–1201, 1978.
- [Mor94] P. Del Moral. *Résolution Particulaire des problèmes d'estimation et d'optimisation Non Linéaires*. PhD dissertation, Université Paul Sabatier - CNRS/LAAS, Toulouse, France, 1994.
- [MPB90] J.R. Moore, G.J. Portmann, and W.G. Bath. Separated covariance filtering. In *Proceedings of IEEE 1990 International Radar Conference*, pages 456–460, 1990.

- [MPG86] A.K. Mahalanabis, S. Prasad, and A. Garg. A smoothing algorithm for improved tracking in clutter and multitarget environment. In *Proceedings of 1986 American Control Conference*, pages 908–910, Seattle, WA, june 1986.
- [MR83] Peter S. Maybeck and S.K. Rogers. Adaptive tracking of multiple hot-spot target ir images. *IEEE Trans. on AC*, 28 :937–943, october 1983.
- [MT83] V. John Mathews and Jitendra K. Tugnait. Detection and estimation with fixed lag for abruptly changing systems. *IEEE Trans. on AES*, 19(5) :730–739, september 1983.
- [Mui82] Robb J. Muirhead. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982. 595 pages.
- [Mul59] M.E. Muller. A note on a method for generating points uniformly on n-dimensional sphere. *Comm. of the ACM*, 2(4) :19–20, 1959.
- [Mur68] K.G. Murty. An algorithm for ranking all the assignments in order of increasing cost. *Oper. Research*, 16 :682–687, 1968.
- [Mur92] F. Murtagh. A new approach to point pattern matching. *Astronomical Society of The Pacific*, 104, 1992.
- [Mus92] D. Musicki. *Automatic Tracking of Maneuvering Targets in Clutter using IPDA*. PhD dissertation, University of Newcastle, New South Wales, Australia, 1992.
- [MV89] K. Malakian and A. Vidmar. Track-to-track association and fusion for almost identical multiple sensors. In *Proceedings of 2nd National Symposium on Sensors and Sensor Fusion*, pages 35–48, march 1989.
- [MVM79] Richard L. Moose, H.F. Vanlandingham, and D.H. McCabe. Modeling and estimation for tracking maneuvering targets. *IEEE Transactions on AES*, 15(3) :448–455, may 1979.
- [MVM80] Richard L. Moose, H.F. Vanlandingham, and D.H. McCabe. Application of adaptive state estimation theory. In *Proceedings of 19th IEEE Conference on Decision and Control*, Albuquerque, MD, december 1980.
- [MWI80] P.J. McLane, P.H. Wittke, and C.K.S. Ip. Least mse adaption of parameters in tws radar systems. In *Proceedings of 1980 IEEE International Radar Conference*, Arlington, VA, april 1980.
- [Nab97] Nassib Nabaa. *Advanced Data Fusion Methods with Application to the Multitarget Multisensor Tracking Problem*. PhD dissertation, University of Texas, Austin, TX, may 1997.
- [NB94] Nassib Nabaa and Robert H. Bishop. Estimate fusion for 2d searcg sensors. Technical Report Technical Report, Vol 1, University of Texas, Austin, TX, december 1994. (submitted to Oerlikon-Contraves AG).

- [NB95a] Nassib Nabaa and Robert H. Bishop. A centralized filtering solution to the multiple sensor aircraft tracking problem. Technical Report Technical Report, Vol 2, University of Texas, Austin, TX, september 1995. (submitted to Oerlikon-Contraves AG).
- [NB95b] Nassib Nabaa and Robert H. Bishop. Estimate fusion for 2d search sensors. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, pages paper no AIAA-95-3246-CP, Baltimore,MD, august 1995.
- [NB96] Nassib Nabaa and Robert H. Bishop. Recursive solution to the sensor registration problem in a multiple sensor aircraft tracking scenario. In Oliver Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, Orlando,FL, april 1996.
- [NBS80] Lawrence Ng and Yaakov Bar-Shalom. Modeling of unresolved detections for tracking of neighboring targets. Technical Report Technical Report ECCS-Systems 80-8, University of Connecticut, Storrs, CT, september 1980.
- [NBS81] Lawrence Ng and Yaakov Bar-Shalom. Modeling of unresolved detections for tracking of neighboring targets. In *Proceedings of OCEANS 81 Conference*, pages 982–987, Boston, MA, september 1981.
- [NBS86] Lawrence Ng and Yaakov Bar-Shalom. Multisensor multitarget time delay vector estimation. *IEEE Trans. on ASSP*, 34 :669–678, august 1986.
- [NCB96] Nassib Nabaa, J.R. Carpenter, and Robert H. Bishop. Comparison of distributed filtering algorithms based on minimum variance methods. In *Proceedings of AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Conf.*, pages paper no AAS 96-110, Austin, TX, february 1996.
- [NCS84] V. Nagarajan, M.R. Chidambara, and R.N. Sharma. A new solution to the combinatorial problems in multi-target tracking. *Electro-Technology*, pages 56–61, 1984.
- [NCS87a] V. Nagarajan, M.R. Chidambara, and R.N. Sharma. Combinatorial problems in multitarget tracking - a comprehensive solution. In *IEE Proceedings - Part F*, volume 134, pages 113–118, february 1987.
- [NCS87b] V. Nagarajan, M.R. Chidambara, and R.N. Sharma. New approach to improved detection and tracking performance in track-while-scan radars, part 2 :detection, track initiation and association. In *IEE Proceedings*, volume 134 - F, pages 93–98, february 1987.
- [NCS87c] V. Nagarajan, M.R. Chidambara, and R.N. Sharma. New approach to improved detection and tracking performance in track-while-scan radars. In *IEE Proceedings - Part F*, volume 134, pages 89–112, february 1987.
- [NK97] D. Nauck and Rudolf Kruse. A neuro-fuzzy method to learn fuzzy classification rules from data. *Fuzzy Sets and Systems*, 89(3) :277–288, 1997.

- [NLG84] S.C. Nardone, Allen G. Lindgren, and K.F. Gong. Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis. *IEEE Trans. on AC*, 29(9) :775–787, september 1984.
- [NSC84] V. Nagarajan, R.N. Sharma, and M.R. Chidambara. An algorithm for tracking a maneuvering target in clutter. *IEEE Trans. on AES*, 20(5) :560–573, september 1984.
- [OB91] S.D. O’Neil and M.F. Bridgland. Fast algorithms for joint probabilistic data association. In *Proceedings of the National Symposium on Sensor Fusion*, Orlando, FL, 1991.
- [Oco80] D.L. Ocone. *Topics in Nonlinear Filtering Theory*. PhD dissertation, MIT, Cambridge, MA, 1980.
- [Oga84] H. Ogawa. Labeled point pattern matching by fuzzy relaxation. *Pattern Recognition*, 17(5), 1984.
- [OKBS93] Eliezer Oron, Anil Kumar, and Yaakov Bar-Shalom. Precision tracking with segmentation for imaging sensors. *IEEE Trans. on AES*, 29 :977–987, july 1993.
- [Oli93] Christian Olivier. *Stratégies d’Acquisition, de Traitement et de Prise en Compte d’Informations en Vue du Contrôle d’un Robot en Environnement Non Structuré*. PhD dissertation, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1993.
- [OP93] S.D. O’Neil and L.Y. Pao. Multisensor fusion algorithms for tracking. In *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, CA, june 1993.
- [OSG89] R.I. Odom, G.M. Stuart, and F.D. Gorecki. Design and performance analysis of a jpdaf tracker for an electronically scanned radar. In *Proceedings of AIAA Guidance and Control Conference*, Boston, MA, august 1989.
- [Pa90] Krishna R. Pattipati and al. On mapping a tracking algorithm onto parallel processors. *IEEE Trans. on AES*, 26 :774–791, september 1990.
- [Pap84] Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Book Company, 2nd Edition, New York, 1984. 570 pages.
- [Par60] E. Parzen. *Modern Probability Theory and Its Applications*. John Wiley, New York, 1960.
- [Pat77] Krishna Pattipati. Factorization algorithms for probabilistic data association filter. Technical Report Tech. Note to BBN, University of Connecticut, Storrs, CT, july 1977.
- [Pat92] Krishna Pattipati. Computationally efficient factorization algorithms for pda, imm and immpda filters. Technical Report Tech. Rep. TR92-2, University of Connecticut, Storrs, CT, 1992.
- [PB86] A.G. Prosser and W.G. Bath. Macroscopic spatial-temporal correlation properties of radar clutter. In *Proceedings of IEEE 1986 National Radar Conference*, pages 98–110, 1986.
- [PDBSW90] Krishna R. Pattipati, Somnath Deb, Yaakov Bar-Shalom, and Robert B. Washburn. Passive multisensor data association using a new relaxation algorithm. In Y. Bar-Shalom, editor,

- Multitarget-Multisensor Tracking : Advanced Applications*, chapter 7. Artech House, Boston, MA, 1990. 369 pages.
- [PDBSW92] Krishna R. Pattipati, Somnath Deb, Yaakov Bar-Shalom, and Robert B. Washburn. A new relaxation algorithm and passive sensor data association. *IEEE Trans. on AC*, 37(2) :198–213, february 1992.
- [PDW89] Krishna R. Pattipati, Somnath Deb, and Robert B. Washburn. A comparison of assignment algorithms for the passive sensor correlation problem. In *Proceedings of the 1989 IEEE Intern. Conf. on Control and Applications*, Jerusalem, Israel, 1989.
- [PE79] D.W. Porter and T.S. Englar. Multiobject tracking via a recursive generalized likelihood approach. In *Proceedings of 18th IEEE Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, december 1979.
- [Pea84] J. Pearl. *Heuristics*. Addison-Wesley, New York, 1984.
- [PFTV86] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Pie68] J.F. Pierce. Application of combinatorial programming to a class of all-zero-one integer programming problems. *Management Science*, 15 :191–209, november 1968.
- [Pie92] W. Pieczynski. Statistical image segmentation. *Machine Graphics Vision*, 1(1/2), 1992.
- [Pie95] W. Pieczynski. Champs de markov cachés et estimation conditionnelle itérative. *Rev. Traitement du Signal*, 11(2) :142–143, 1995.
- [PJM98] Sébastien Paris, Claude Jauffret, and G. Goulet. Frequency line tracker in passive sonar system. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [PL75] J.F. Pierce and J.S. Lasky. Improved combinatorial programming to a class of all-zero-one integer programming problems. *Management Sci.*, 19 :528–543, january 1975.
- [Pol78] B.T. Poljak. Subgradient method : A survey of soviet research. In C. Lemarechal and R. Mifflin, editors, *Nonsmooth Minimization*. Pergamon, London, UK, 1978.
- [Poo88] H.V. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [Pop92] Robert Popoli. The sensor management imperative. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 10. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [PR91] A.B. Poore and N. Rijavec. Multi-target tracking and multi-dimensional assignment problems. In *Proceedings of the 1990 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1481, pages 345–356, Orlando, FL, april 1991.

- [PR92] A.B. Poore and N. Rijavec. A new class of methods for solving data association problems arising from multi-target tracking. In *Proceedings of the 1991 American Control Conference*, volume 3, pages 2302–2304, Boston, MA, 1992.
- [PRB92] A.B. Poore, N. Rijavec, and T. Barker. Data association for track initiation and extension using multi-scan windows. In *Proceedings of the 1990 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, pages 432–441, Bellingham, WA, september 1992.
- [PRBM93a] A.B. Poore, N. Rijavec, T.N. Barker, and M. Munger. Data association problems posed as multidimensional assignment problems : Algorithm development. In I. Kadar and V. Libby, editors, *Proceedings of the 1993 SPIE Conf. on Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition II*, volume 1955, 1993.
- [PRBM93b] A.B. Poore, N. Rijavec, T.N. Barker, and M. Munger. Data association problems posed as multidimensional assignment problems : Numerical simulations. In *Proceedings of the 1993 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 564–573, Bellingham, WA, 1993.
- [Pre82] J.A. Presley. Censored near-level detections for multiple target environment. In *Proceedings of 16th Asilomar Conference on Circuits and Systems*, Pacific Grove, CA, november 1982.
- [PRVL93] A.B. Poore, N. Rijavec, V.C. Vannicola, and M. Liggins. Data association problems posed as multidimensional assignment problems : Problem formulation. In *Proceedings of the 1993 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 552–563, Bellingham, WA, 1993.
- [PS82] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [PS83] Krishna Pattipati and N.R. Sandell. A unified view of state estimation in switching environments. In *Proceedings of the 1983 American Control Conference*, pages 458–465, San Francisco, CA, june 1983.
- [PSK81] Krishna Pattipati, N.R. Sandell, and L.C. Kramer. A unified view of multi-object tracking. In *Proceedings of 4th MIT-ONR C3 Workshop*, San Diego, CA, june 1981.
- [Rao97] N.S.V. Rao. Distributed decision fusion using empirical estimation. *IEEE Trans. on AES*, 33(4) :1106–1114, october 1997.
- [Rao98] N.S.V. Rao. A fusion method that performs better than best sensor. In *Proceedings of First Int. Conf. on Inf. fusion (Fusion'98)*, pages 19–26, Las Vegas, USA, july 1998.
- [Rei77] Donald B. Reid. A multiple hypothesis filter for tracking multiple targets in a cluttered environment. Technical Report Tech. Report LMSC-D560254, Lockheed Palo Alto Research Lab, Palo Alto, CA, september 1977. 79 pages.

- [Rei79a] Donald B. Reid. An algorithm for tracking multiple targets. In *Proceedings of the 1978 IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1202–1211, San Diego, CA, january 10-12th 1979.
- [Rei79b] Donald B. Reid. An algorithm for tracking multiple targets. *IEEE Transactions on AC*, 24(6) :843–854, december 1979.
- [Rei79c] Donald B. Reid. The application of multiple target tracking theory to ocean surveillance. In *Proceedings of 18th IEEE Conf. on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, december 1979.
- [Rei79d] Donald B. Reid. A non gaussain filter for tracking targets moving over terrain. In *Proceedings of the 1978 IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, january 10-12th 1979.
- [Rei79e] Donald B. Reid. A non-gaussian filter for tracking targets moving over terrain. In *Proceedings of 17th (1978) IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, january 1979.
- [RF80] Herbert E. Rauch and O. Firschein. Track assembly for two-dimensional images of binary data. In *Proceedings of 19th IEEE Conference on Decision and Control*, Albuquerque, NM, december 1980.
- [RHL91] S. Roy, R.H. Hashemi, and A.J. Laub. Square root parallel parallel kalman filtering using reduced-order local filters. *IEEE Transactions on AES*, 27(2) :276–289, march 1991.
- [Rho71] I.B. Rhodes. A tutorial introduction to estimation and filtering. *IEEE Transactions on AC*, 16(6) :688–706, december 1971.
- [RI88] Sumit Roy and Ronald A. Iltis. Tracking a maneuvering target in clutter using combined probabilistic data and maneuver association. In N. Martin J.L. Lacoume, A. Chehikian and J. Malbos, editors, *Signal Processing IV : Theories and Applications (Eurasip 88)*, pages 783–786. Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1988.
- [RI91] Sumit Roy and Ronald A. Iltis. Decentralized linear estimation in correlated measurement noise. *IEEE Transactions on AES*, 27(6) :939–941, november 1991.
- [Ric92] H.S. Richardson. Multiple multistage hypothesis tests. M.S. dissertation, Queen's University, Kingston, 1992.
- [Rig93] G. Rigal. *Filtrage Non-Linéaire, Résolution Particulaire et Applications au Traitement du Signal*. PhD dissertation, Université Paul Sabatier - CNRS/LAAS, Toulouse, France, 1993.
- [RM88] J.A. Roecker and C.D. McGillem. Comparison of two-sensor tracking methods based on state vector fusion and measurement fusion. *IEEE Transactions on AES*, 24 :447–449, july 1988.
- [Rob56] H. Robbins. An empirical bayes approach to statistics. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 157–175, Univ. of Berkeley Press, 1956.
- [Roc70] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

- [Roe91a] J.A. Roecker. Effectivness of track monitoring with multiple 2-d passive sensors. *IEEE Transactions on AES*, 27(6) :941–945, november 1991.
- [Roe91b] J.A. Roecker. Track monitoring when tracking with multiple 2-d passive sensors. *IEEE Transactions on AES*, 27(6) :872–876, november 1991.
- [Roe93] J.A. Roecker. A class of near-optimal jpda algorithms. In Oliver E. Drummond, editor, *Proceedings of SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 331–340, 1993.
- [Roe94] J.A. Roecker. A class of near-optimal jpda algorithms. *IEEE Transactions on AES*, 30(2) :504–510, april 1994.
- [Rog88a] S.R. Rogers. Optimal measurement scheduling for multitarget tracking with a single sensor. In *Proceedings of 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin, TX, december 1988.
- [Rog88b] S.R. Rogers. Tracking multiple targets with correlated measurements and maneuvers. *IEEE Transactions on AES*, 24 :313–315, may 1988.
- [Rog89] S.R. Rogers. Instabiliy of the decoupled kalman tracking filter. *IEEE Transactions on AC*, 34 :469–471, april 1989.
- [Rog91] S.R. Rogers. Diffusion analysis of track loss in clutter. *IEEE Transactions on AES*, 27 :380–387, march 1991.
- [RP93] J.A. Roecker and G.L. Philis. Suboptimal joint probabilistic data association. *IEEE Transactions on AES*, 29(2) :510–517, april 1993.
- [RPBS93] Vijaya Raghavan, Krishna R. Pattipati, and Yaakov Bar-Shalom. Efficient l-d factorization algorithms for pda, imm and immpda filters. *IEEE Trans. on AES*, 29(4) :1297–1310, october 1993.
- [RR80] S. Ranade and A. Rosenfeld. Point pattern matching by relaxation. *Pattern Recognition*, 12, 1980.
- [Rub81] Reuven Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.
- [Rub86] Reuven Y. Rubinstein. *Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queueing Networks*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [RW78] G.C. Ricker and J.R. Williams. Adaptive tracking filter for maneuvering targets. *IEEE Transactions on AES*, 14 :185–193, january 1978.
- [RW84] R.A. Redner and H.F. Walker. Mixture densities, maximum likelihood and the em algorithm. *Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM*, 26(2) :195–239, april 1984.

- [RWBS94] Constantino Rago, Peter Willett, and Yaakov Bar-Shalom. Tracking with fused noncoincident measurements. In *Proceedings of the 1994 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 2235, pages 351–362, Orlando, FL, april 1994.
- [RWS94] Constantino Rago, Peter Willett, and Roy Streit. A comparison of the jpdaf and pmht tracking algorithms. In *Proceedings of the International Conference on ASSP*, pages 3571–3574, may 9-12th 1994.
- [SA71] H.W. Sorenson and D.L. Alspach. Recursive bayesian estimation using gaussian sums. *Automatica*, 7 :465–479, 1971.
- [Sal88] D.J. Salmond. Mixture reduction algorithms for uncertain tracking. Technical Report Tech. Report no 88004, Royal Aerospace Establishment, Farnborough, England, january 1988.
- [SB71] Ronald A. Singer and K.W. Behnke. Real-time tracking filter evaluation and selection for tactical applications. *IEEE Trans. on AES*, 7(1) :100–110, 1971.
- [SB75a] P.L. Smith and G. Buechler. A branching algorithm for discriminating and tracking multiple objects. *IEEE Trans. on AC*, 20 :101–105, february 1975.
- [SB75b] J.J. Stein and Samuel S. Blackman. Generalized correlation of multi-target track data. *IEEE Trans. on AES*, 11 :1207–1217, november 1975.
- [SB85] M.J. Shensa and V. Browman. The sequential processing of report detections in multitarget data association. In *Proceedings of American Control Conf.*, Boston, MA, june 1985.
- [SBS90] Hemchandra M. Shertukde and Yaakov Bar-Shalom. Detection and estimation for multiple targets with two omnidirectional sensors in the presence of false measurements. *IEEE Transactions on ASSP*, 38 :749–763, may 1990.
- [SBS92] Hemchandra M. Shertukde and Yaakov Bar-Shalom. Precision tracking of small extended targets with imaging sensors. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 5. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [SC98] R.K. Saha and Kuo-Chu Chang. An efficient algorithm for multisensor track fusion. *IEEE Transactions on AES*, 34(1), january 1998.
- [Sch73] F.C. Schweppe. *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice Hall, New York, 1973.
- [Sch75] C.C. Schooler. Optimal  $\alpha$ - $\beta$  filters for systems with modeling inaccuracies. *IEEE Transactions on AES*, 11(6) :1300–1306, november 1975.
- [Sch92] R. Schalkoff. *Pattern Recognition : Statistical, Structural and Neural Approaches*. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [SCw78] D.W. Sanders and Co-workers. Specific structures for large-scale state estimation algorithms having information exchange. *IEEE Trans on AC*, 23 :255, 1978.

- [Sea71] R.G. Sea. An efficient suboptimal decision procedure for associating sensor data with stored tracks in real-time surveillance systems. In *Proceedings of 10th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 33–37, Miami Beach, FL, december 1971.
- [SG98] D.J. Salmond and Neil Gordon. Tracking in the presence of intermittent spurious objects and clutter. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [SH89] D.D. Sworder and R.G. Hutchins. Image enhancement tracking. *IEEE Transactions on AES*, 25 :701–710, september 1989.
- [SH93] D.D. Sworder and R.G. Hutchins. Utility of imaging sensors in tracking systems. *Automatica*, 29(2) :445–449, march 1993.
- [Sha70] Shapiro. On the counting problem for monotone boolean functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :299–312, 1970.
- [Sha76] Glenn Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- [Sha82] Glenn Shafer. Constructive decision theory. In *Working paper*, december 1982.
- [Sha86] Glenn Shafer. The combination of evidence. *International Journal of Intelligent Systems*, 1 :155–179, 1986.
- [She82] M.J. Shensa. Bayr - a data association algorithm based on a bayesian recursion. Technical Report Final Report no 848, Naval Ocean Systems Center (NOSC), San Diego, CA, november 1982.
- [She84] S. Sherman. *Monopulse Principles and Techniques*. Artech House, Norwood, MA, 1984.
- [SHL95] David S.K.Chan, Daniel D. Harrison, and David A. Langan. Tracking in a high clutter environment : Simulation results characterizing a bi-level mht algorithm. In *Proceedings of the 1995 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1954, pages 540–551, 1995.
- [SI89] D. Sengupta and Ronald A. Iltis. Tracking of multiple maneuvering targets in clutter by joint probabilistic data association. In *Proceedings of the 1989 American Control Conference*, volume 3, pages 2696–2701, june 1989.
- [Sib62] M. Sibuya. A method for generating uniformly distributed points on n-dimensional sphere. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 14 :81–85, 1962.
- [Sin70] Ronald A. Singer. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets. *IEEE Trans. on AES*, 6(4) :473–483, july 1970.
- [Sit64] R.W. Sittler. An optimal data association problem in surveillance theory. *IEEE Trans. Military Electronics*, MIL-8 :125–139, april 1964.

- [SK71] Ronald A. Singer and A.J. Kanyuck. Computer control of multiple site correlation. *Automatica*, 7 :455–463, july 1971.
- [SK85] H.C. Salzwedel and K.M. Kessler. Transfer of alignment and calibration of multiple sensors in flexible systems. In *Proceedings of 24th IEEE Conf. on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, december 1985.
- [S.K92] David S.K.Chan. A unified framework for ir target detection and tracking. In *Proceedings of the 1992 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, 1992.
- [Skl57] J. Sklansky. Optimizing the dynamic parameters of a track-while-scan system. *RCA Review*, 18 :163–185, june 1957.
- [SL93] Roy L. Streit and Tod E. Luginbuhl. A probabilistic multi-hypothesis tracking algorithm without enumeration and pruning. In *Proceedings of the Sixth Joint Service Data Fusion Symposium*, pages 1015–1024, Laurel, MD, june 14-18th 1993.
- [SL94a] Roy L. Streit and Tod E. Luginbuhl. Maximum likelihood method for probabilistic multi-hypothesis tracking. In *Proceedings of the 1994 SPIE International Symposium on Optical Engineering and Photonics in Aerospace Sensing*, volume 2235-24, Orlando, FL, april 5-7th 1994.
- [SL94b] Roy L. Streit and Tod E. Luginbuhl. Maximum likelihood training of probabilistic neural networks. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 5(5) :764–783, september 1994.
- [SL95] Roy L. Streit and Tod E. Luginbuhl. Probabilistic multi-hypothesis tracking. Technical Report NUWC-NPT Technical Report 10,428, Naval Undersea Warfare Center Division (NUWC), Storrs, CT, february, 15th 1995.
- [SL96] D.F. Liang S.S. Lim. A practical overview of multiple target tracking algorithms. *AGARDograph 337 : Multi-sensor Multi-Target Data Fusion, Tracking and Identification Techniques for Guidance and Control Applications*, pages 67–75, october 1996.
- [SL98] Pailon Shar and Xiao Rong Li. Some considerations of submarine sensor fusion. In *Proceedings of First Int. Fusion Conference (Fusion'98)*, pages 930–936, Las Vegas, july 1998.
- [SLM69] F.L. Sims, D.G. Lainiotis, and D.T. Magill. Recursive algorithm for the calculation of the adaptive kalman filter weighting coefficients. *IEEE Trans. on AC*, 14 :215–218, april 1969.
- [SM71] Andrew P. Sage and James L. Melsa. *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1971. 529 pages.
- [Sma00] F. Smarandache. *An Unifying Field in Logics : Neutrosophic Logic*. American Research Press, Rehoboth (ISBN 1-879585-76-6), 2000.
- [Sme90] Philippe Smets. The combination of evidence in the transferable belief model. *IEEE Trans. on PAMI*, 12(5), 1990.

- [Smi64] G.L. Smith. Multivariate linear filter theory applied to space vehicle guidance. *SIAM J. of Control*, 2 :19–32, 1964.
- [Smi76] P.L. Smith. reduction of sea surveillance data using binary matrices. *IEEE Trans. on SMC*, 6 :531–538, august 1976.
- [Sny70] D.L. Snyder. *The State Variable Approach to Continuous Estimation*. MIT Press, Boston, MA, 1970.
- [Sny75] D.L. Snyder. *Random Point Processes*. John Wiley, New York, 1975.
- [SOG89] G.M. Stuart, R.I. Odom, and F.D. Gorecki. Implementation of a jpdaf tracker for an electronically scanned radar. In *Proceedings of AIAA Guidance and Control Conference*, Boston, MA, august 1989.
- [Sor70] H.W. Sorenson. Least-squares estimation : from gauss to kalman. *IEEE Spectrum*, 7(7) :63–68, july 1970.
- [Sor85] H.W. Sorenson. *Kalman Filtering : Theory and Applications*. IEEE Press, 1985.
- [Sow72] E.R. Sowey. A chronological and classified bibliography on random number generation and testing. *International Statistical Review*, 40(3) :355–371, 1972.
- [Sow78] E.R. Sowey. A second classified bibliography on random number generation and testing. *International Statistical Review*, 46 :89–102, 1978.
- [SP90] Glenn Shafer and Judea Pearl. *Readings in Uncertain Reasoning*. Morgan-Kauffman, 1990.
- [SP98] Barbara La Scala and G.W. Pulford. Viterbi data association tracking for over-the-horizon radar. In *Proceedings of International Radar Symposium (IRS98)*, volume 3, pages 1155–1164, München, Germany, september 15-17th 1998.
- [Spe79] J.L. Speyer. Computation and transmission requirements for a decentralized lqg control problem. *IEEE Trans. on AC*, 24(3) :266–269, april 1979.
- [Spi81] Murray R. Spiegel. *Formules et Tables de Mathématiques*. Série Schaum. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1981. 272 pages.
- [SS71a] Ronald A. Singer and R.G. Sea. A new filter for optimal tracking in dense multitarget environments. In *Proceedings of the 9th Allerton Conference on Circuit and System Theory*, pages 201–211, Urbana, Illinois, october 1971.
- [SS71b] Ronald A. Singer and J.J. Stein. An optimal tracking filter for processing sensor data of imprecisely determined origin in surveillance systems. In *Proceedings of 10th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 171–175, Miami Beach, FL, december 1971.
- [SS71c] H.W. Sorenson and J.E. Sacks. Recursive fading memory filtering. *Information Sciences*, 5 :101–119, 1971.

- [SS73] Ronald A. Singer and R.G. Sea. New results in optimizing surveillance system tracking and data correlation performance in dense multitarget environments. *IEEE Trans. on AC*, 18(6) :571–581, december 1973.
- [SS83] T.L. Song and J.L. Speyer. A stochastic analysis of a modified gain extended kalman filter with applications to estimation with bearing only measurements. In *Proceedings of 22nd IEEE Conf. on Decision and Control*, San Antonio, TX, december 1983.
- [SS98] Jari Syrjarinne and Jukka Saarinen. Local angle-only tracking using modified pda. In *Proceedings of First Int. Fusion Conference (FUSION'98)*, pages 771–778, Las Vegas, july 1998.
- [SSH72] Ronald A. Singer, R.G. Sea, and K. Housewright. Comparison of theoretical and simulated performance of optimal and suboptimal filters in a dense multitarget environments. In *Proceedings of IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 700–701, december 1972.
- [SSH74] Ronald A. Singer, R.G. Sea, and K. Housewright. Derivation and evaluation of improved tracking filters for use in dense multitarget environments. *IEEE Trans. on Information Theory*, 20(4) :423–432, july 1974.
- [SSM62] G.L. Smith, S.F. Schmidt, and L.A. McGee. Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on-board a circumlunar vehicle. Technical Report Tech. Report TR-R-135, NASA, 1962.
- [Sta87a] D.V. Stallard. An angle only tracking filter in modified spherical coordinates. In *Proceedings of 1987 AIAA Guidance and Control Conference*, pages 542–550, 1987.
- [Sta87b] D.V. Stallard. An angle only tracking filter in modified spherical coordinates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pages 542–550, 1987.
- [Ste71] G.W. Stewart. *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press, New York, 1971.
- [Str60] S.T. Stratonovich. Conditional markov process. *Theory of Probabilities and Applications*, 5(2) :156–168, 1960.
- [Str65] C. Striebel. Sufficient statistics in the optimum control of stochastic systems. *J. Math. Analysis & Applications*, 12 :576–592, december 1965.
- [Sun74] R. Sundberg. Maximum likelihood theory for incomplete data from an exponential family. *Scand. J. Statist*, 1 :49–58, 1974.
- [Sun76] R. Sundberg. An iterative method for solution of the likelihood equations for incomplete data from exponential families. *Comm. Statist. Simulation Comput.*, 5 :55–64, 1976.
- [Sun77a] M.K. Sundareshan. Decentralized observation in large-scale systems. *IEEE Trans. on SMC*, 7(12) :863–867, december 1977.
- [Sun77b] M.K. Sundareshan. Generation of multilevel control and estimation schemes for large-scale systems : A perturbation approach. *IEEE Trans. on SMC*, 7(3) :144–152, march 1977.

- [SV76] D.D. Siljak and M.B. Vukcevic. Decentralisation, stabilisation, and estimation of large-scale linear systems. *IEEE Trans. on AC*, pages 363–366, june 1976.
- [SW72] K. Spingarn and H.L. Weidemann. Linear regression filtering and prediction for tracking maneuvering aircraft targets. *IEEE Trans. on AES*, 8 :800–810, november 1972.
- [SW79] G.L. Smith and E.M. Winter. On the detection of target trajectories in a multitarget environment. In *Proceedings of 17th (1978) IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, january 1979.
- [SW94] J. Sprinkaz and M. Werman. Affine point matching. *Pattern Recognition Letter*, 15 :337–339, april 1994.
- [SW98] Roy L. Streit and Michael J. Walsh. Augmented bearings-only target motion analysis with propagation loss models. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [Swe59] P. Swerling. First order error propagation in a stagewise smoothing procedure for satellite observations. *J. Astronautical Sciences*, 6 :46–52, Autumn 1959.
- [Ta85] B.D. Tapley and al. A new method for enhancement of data separability and data classification in multitarget-multisensor tracking problems. In *Proceedings of American Control Conference*, Boston, MA, june 1985.
- [Tae80] E. Taenzer. Tracking multiple targets simultaneously with passive array radar. *IEEE Trans. on AES*, 16 :604–614, september 1980.
- [TBM77] Robert R. Tenney, T.B. Ballard, and L.E. Miller. A dual passive tracking filter for maneuvering targets. In *Proceedings of Conf. on Advances in Target Tracking*, Monterey, CA, may 1977.
- [TD84] Robert R. Tenney and J.R. Delaney. Distributed aeroacoustic tracking algorithm. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 1440–1450, San Diego, CA, june 1984.
- [Ten82] D. Teneketzis. The decentralized quickest detection problem. In *Proceedings of IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, december 1982.
- [TGS87] Bernard Tomasini, Michel Gauvrit, and B. Siffredi. Bayesian adaptive filter for multiple maneuvering target tracking with measurements of uncertain origin. In *Proceedings of First Int. Symp. on Signal Processing and Its Applications*, pages 473–479, Brisbane, Australia, august 1987.
- [TGS89a] Bernard Tomasini, Michel Gauvrit, and B. Siffredi. Bayesian adaptive filter for multiple maneuvering target tracking with measurements of uncertain origin. In *Proceedings of SPIE on Small Targets Tracking*, volume 1096, pages 209–214, march 1989.
- [TGS89b] Bernard Tomasini, Michel Gauvrit, and B. Siffredi. Bayesian adaptive filters for multiple maneuvering target tracking with measurements of uncertain origin. In *Proceedings of 28th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1397–1399, december 1989.

- [TH79] Jitendra K. Tugnait and A.H. Haddad. A detection-estimation scheme for state estimation in switching environments. *Automatica*, 15 :477–481, 1979.
- [Tho73] J.S. Thorp. Optimal tracking of maneuvering targets. *IEEE Trans. on AES*, 9(4) :512–519, july 1973.
- [Tho87] S.C.A Thomopoulos. Optimal decision fusion in multiple sensor systems. *IEEE Trans. on AES*, 23 :644–653, september 1987.
- [THS77] Robert R. Tenney, R.S. Hebbert, and N.R. Sandell. A tracking filter for maneuvering sources. *IEEE Trans. on AC*, 22 :246–251, april 1977.
- [TL86] G.T. Tso and R.N. Lobbia. Multimode guidance in advanced air-to-air missile applications. In *Proceedings of AIAA Conf. on Guidance, Navigation, and Control*, Williamsburg, VA, august 1986.
- [TL00] Alexander Tartakovsky and Xiao Rong Li. Sequential testing of multiple hypotheses in distributed systems. In *Proceedings of third Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2000)*, Vol. 2, Paris, France, july 2000.
- [TNS81a] Robert R. Tenney and Jr. N.R. Sandell. Additions and changes : Detections with distributed networks. *IEEE Trans. on AES*, 17(5) :736, september 1981.
- [TNS81b] Robert R. Tenney and Jr. N.R. Sandell. Detections with distributed networks. *IEEE Trans. on AES*, 17(4) :501–509, 1981.
- [Tom89] Bernard Tomasini. *Poursuite Multicible adaptative dans un environnement très perturbé : Application à un problème de veille*. PhD dissertation, Université d'Aix et de Marseille, Aix-Marseille, France, march 1989.
- [TPLT91] W.E. Thompson, R. Parra-Loera, and C.W. Tao. A pseudo  $k$ -means approach to the multi-sensor multitarget tracking problem. In Vibeke Libby, editor, *Proceedings of SPIE Conf. Data Structures and Target Classification*, volume 1698, Orlando,FL, april 1991.
- [Tré95] Olivier Trémois. *Etude de méthodes de trajectographie pour des sources manœuvrantes*. PhD dissertation, Université de Rennes 1, Rennes, France, 1995.
- [Tre72] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, volume 1,2,3. John Wiley, New York, 1967,1968,1972. 3 Volumes.
- [Tru78a] G.V. Trunk. Range resolution of targets using automatic detectors. *IEEE Trans. on AES*, 14(5) :750–754, september 1978.
- [Tru78b] G.V. Trunk. Track initiation in a dense detection environment. Technical Report Technical Report 8238, Naval Research Laboratory, july 1978.
- [TS80] E.C. Tacker and C.W. Sanders. Decentralized structures for state estimation for large scale systems. *Large Scale Systems Theory and Applications*, 1(1) :39–49, february 1980.

- [TS90] M. Tahk and J.L. Speyer. Target tracking subject to kinematic constraints. *IEEE Trans. on AC*, 35 :324–326, march 1990.
- [Tsa91] H. Tsaknakis. Tracking closely-spaced objects using multiassignment algorithms. In *Tri-Service Data Fusion Symposium*, november 1991.
- [TSM85] D.M Titterington, A.F.M. Smith, and U.E. Makov. *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*. John Wiley and Sons, New York, 1985.
- [Tug82] Jitendra K. Tugnait. Detection and estimation for abruptly changing systems. *Automatica*, 18(5) :607–625, 1982.
- [Tuv94] Olivier Tuveny. *Modélisation Incertaine en Pistage Multi-Hypothèses : Application à un Problème d'Initialisation Automatique de Pistes dans un Environnement Perturbé*. PhD dissertation, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Nice, France, october, 5th 1994. 173 pages.
- [TW81] G.V. Trunk and J.D. Wilson. Track initiation of occasionally unresolved targets. *IEEE Trans. on AES*, 17 :122–130, january 1981.
- [TW87] G.V. Trunk and J.D. Wilson. Association of df bearing measurements with radar tracks. *IEEE Trans. on AES*, 23 :438–447, july 1987.
- [WT81] R.M. Tong, R.P. Wishner, and E. Tse. Distributed hypothesis formation in sensor fusion systems. In *Proceedings of 20th Conf. On Decision and Control*, San Diego, CA, december 1981.
- [Uhl92] J.K. Uhlmann. Algorithms for multiple target tracking. *American Scientist*, 80 :128–141, march 1992.
- [Ume92] S. Umeyama. Least squares estimation of transformation parameters between two point patterns. *IEEE Trans. on PAMI*, 13 :376–380, april 1992.
- [Var88] R. Varad. Scalar correlation algorithm : Multitarget multisensor data fusion. In *Proceedings of 2nd Natn'l Symposium on Sensor Fusion*, Orlando, FL, april 1988.
- [Var97] Pramod K. Varshney. *Distributed Detection and Data Fusion*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Vau70] D.R. Vaughan. A nonrecursive algebraic solution for the discrete riccati equation. *IEEE Trans. on AC*, 15 :597–599, october 1970.
- [VBG92] Pierre Vacher, Isabelle Barret, and Michel Gauvrit. Design of a tracking algorithm for an advanced atc system. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 1. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [VG89] Pierre Vacher and Michel Gauvrit. Bearing only tracking : How to improve the quality of estimation. *AGARD lectures Seris no 166 : Kalman Filter Integration of Modern Guidance and Navigation Systems*, june-july 1989.
- [Vit67] A.J. Viterbi. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. *IEEE Trans. on IT*, 13 :260–269, april 1967.

- [VJ88] D.R. VanRheeden and A. Jones. Noise effects on centroid tracker aim point estimation. *IEEE Trans. on AES*, 24, march 1988.
- [VMB00] L. Valet, G. Mauris, and Philippe Bolon. A statistical overview of recent literature in information fusion. In *Proceedings of third Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2000)*, Vol. 1, Paris, France, july 2000.
- [VPH88] F.J. VanSchaik, F.R. Polak, and R.A. Hogendoorn. Evaluation of a prototype jump-diffusion tracker. Technical Report Report NLR, TR 88127 L, National Aerospace Laboratory (NLR), Amsterdam, The Netherlands, 1988.
- [Wa79] H.L. Wiener and al. Operational and implementation problems of multitarget correlation-trackers. In *Proceedings of 18th IEEE Conf. on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, december 1979.
- [Wa80] Alan S. Willsky and al. Dynamic model-based techniques for the detection of incidents on freeways. *IEEE Trans. on AC*, 25 :347–360, june 1980.
- [WAD85] Robert B. Washburn, T.G. Allen, and D.Teneketzis. Performance analysis for hybrid state estimation problems. In *Proceedings of American Control Conference*, Boston, MA, june 1985.
- [Wah71] A. Wahlen. *Detection of Signals in Noise*. Academic Press, 1971.
- [Wal47] Abraham Wald. *Sequential Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1947.
- [Wal91] S. Walukiewicz. *Integer Programming*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1991.
- [Was87] Robert B. Washburn. A random point process approach to multiobject tracking. In *Proceedings of 1987 American Control Conference*, pages 1846–1852, Minneapolis, MN, june 1987.
- [Wax55] N. Wax. Signal-to-noise improvement and the statistics of track populations. *J. Applied Physics*, 26 :596–595, may 1955.
- [Wax83] M. Wax. Position location from sensors with position uncertainty. *IEEE Trans. on AES*, 19(5) :658–661, september 1983.
- [WB95] G.A. Watson and W.P. Blair. Interacting acceleration compensation algorithm for tracking maneuvering targets. *IEEE Trans. on AES*, 31(3) :1153–1158, 1995.
- [WBC<sup>+</sup>82] Alan S. Willsky, M.G. Bello, D.A. Castanon, B.C. Levy, and G.C. Verghese. Combining and updating of local estimates and regional maps along sets of one-dimensional tracks. *IEEE Trans. on AC*, 27(4) :799–813, august 1982.
- [WCD76a] D. Willner, C.B. Chang, and K.P. Dunn. Kalman filter algorithms for a multisensor system. In *Proceedings of 15th IEEE Conf. on Decision and Control*, Clearwater Beach, FL, december 1976.

- [WCD76b] D. Willner, C.B. Chang, and K.P. Dunn. Kalman filter configurations for multiple radar systems. Technical Report Technical Note 1976-21, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, april 1976.
- [Web95] G. Weber. Point pattern matching. Technical Report Tech. Rep. B95-19, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Freie Universität of Berlin, Germany, december 1995.
- [Weg81] E.J. Wegman. Data fusion. In *Proceedings of Int'l Conf. on Statistical Decision Theory*, 1981.
- [Wer92] J.R. Werthmann. A step-by-step description of a computationally efficient version of multiple hypothesis tracking. In *Proceedings of the 1992 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 1698, 1992.
- [WF88] D.E. Williams and Benjamin Friedland. Target maneuver detection and estimation. In *Proceedings of 27th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 851–855, Austin, TX, december 1988.
- [Wie49] Norbert Wiener. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications*. MIT Press and John Wiley & Sons, Inc, New York, 1949. 163 pages.
- [Wie58] Norbert Wiener. *Nonlinear Problems in Random Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1958. 131 pages.
- [Wie61] Norbert Wiener. *Cybernetics : or Control and Communication in the Animal and the Machine*. MIT Press, Cambridge, MA, 1961. 131 pages.
- [Wil76] Alan S. Willsky. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, 12 :601–611, november 1976.
- [Wil79] J.D. Wilson. Track initiation techniques in a dense detection environment. Technical Report Techn. Report 8342, Naval Research Lab., Washington, DC, september 1979.
- [Wil84] Alan S. Willsky. Detection of abrupt changes in dynamic systems. In Michèle Basseville and Albert Benveniste, editors, *Detection of Abrupt Changes in Signal and Dynamical Systems*, pages 27–49. Springer Verlag, Paris, 1984.
- [Wil91] D.E. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [Wil00] Peter Willett. Detection fusion under dependence. In *Proceedings of third Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2000)*, Paris, France, july 2000.
- [Wil02] Peter Willett. Conference report on the workshop on estimation, tracking and fusion : A tribute to yaakov bar-shalom. *IEEE Systems Magazine*, 21 :28–33, march 2002.
- [WJ74] Alan S. Willsky and Harold L. Jones. A generalized likelihood ratio approach to state estimation in linear systems subject to abrupt changes. In *Proceedings of 1974 IEEE Conf. on Decision and Control*, Phoenix,AZ, november 1974.

- [WJ76] Alan S. Willsky and Harold L. Jones. A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Trans. on AC*, 21(5) :108–112, february 1976.
- [WJ78] W.G. Waller and A.K. Jain. On the monotonicity of the performance of bayesian classifiers. *IEEE Trans. on IT*, 24(3) :392–394, may 1978.
- [WKA94] G. Weber, L. Knipping, and H. Alt. An application of point pattern matching in astronautics. *J. Symbolic Computation*, 17 :321–340, 1994.
- [WKBW84] Robert B. Washburn, T. Kurien, A.L. Blitz, and Alan S. Willsky. Hybrid state estimation approach to multiobject tracking for airborne surveillance radars. Technical Report Techn. Report 180, Alphatech, Burlington, MA, October 1984.
- [WL79] F.P. Witte and D. Lucas. Probabilistic tracking in a multitarget environment. In *Proceedings of 17th (1978) Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, january 1979.
- [WL90] E. Waltz and Jim Llinas. *Multisensor Data Fusion*. Artech House, 1990.
- [WL95] A. Wong and Harry Leung. Multiple target tracking based on constellation matching and kalman filter. In *Proceedings of AGARD Conference*, volume CP-555, pages 25.1–25.21, 1995.
- [WLA70] R.P. Wishner, R.E. Larson, and Michael Athans. Status of radar tracking algorithms. In *Proceedings of Symposium on Nonlinear Estimation*, San Diego, CA, september 1970.
- [WM80] H. Weiss and J.B. Moore. Improved extended kalman filter design for passive tracking. *IEEE Trans. on AC*, 25 :807–811, august 1980.
- [Woo50] Max Woodbury. *Inverting Modified Matrices*. Memorandum Report 42, Statistical Research Group, Princeton, 1950.
- [Woo85] M.S. Woolfson. An evaluation of manoeuvre detector algorithm. *GEC J. of Research*, 3 :181–190, 1985.
- [Wor98] Workshop. Approches probabilistes pour l'extraction multipistes. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [WRH97] M.L. Williams, R.C. Wilson R.C., and E.R. Hancock. Multisensor fusion with bayesian inference. *Lecture Notes in Computer Science*, 1296 :25–32, 1997.
- [WRS95] Peter Willett, Constantino Rago, and Roy L. Streit. The probabilistic multi-hypothesis tracking algorithm : Implementation issues and results. Technical Report Technical Report TR 95-1, University of Connecticut, Storrs, CT, january 1995.
- [WRS98] Peter Willett, Yanhua Ruan, and Roy L. Streit. A variety of pmhts. In *Proceedings of Workshop Commun GdR ISI (GT1) and NUWC - Approches probabilistes pour l'extraction multipistes*, Paris, France, November 9-10th 1998.
- [WT78] J.D. Wilson and G.V. Trunk. Initiation of tracks in a dense detection environment. Technical Report Techn. Report 8238, Naval Research Lab., Washington, DC, 1978.

- [Wu83] C.F. Wu. On the convergence of the em algorithm. *Annals of Statistics*, 11(1) :95–103, 1983.
- [WV93] T.C. Wang and P.K. Varshney. A tracking algorithm for maneuvering targets. *IEEE Trans. on AES*, 29 :910–924, 1993.
- [WVD89] J.K. Wolf, A.M. Viterbi, and G.S. Dixon. Finding the best set of paths through a trellis with application to multitarget tracking. *IEEE Trans. on AES*, 25(2) :287–296, 1989.
- [WWGK79] H.L. Wiener, W.W. Willman, I.R. Goodman, and J.H. Kullback. Naval ocean surveillance correlation handbook. Technical Report Techn. Report 8340, Naval Research Lab., Washington, DC, 1979.
- [Yan86] Ronald M. Yannone. Expert systems in the fighter of the 1990s. *IEEE Aerospace & Electronic Systems Magazine*, 1 :12–16, february 1986.
- [Yan92] Ronald M. Yannone. Attribute fusion and situation assessment with a many-valued logic approach. In Y. Bar-Shalom, editor, *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, chapter 11. Artech House, Boston, MA, 1992. 442 pages.
- [Yav83] Y. Yavin. Strategies using an observer for steering a random motion of a point in a multitarget environment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 :297–310, 1983.
- [YBM89] Chun Yang, Pierre Bertrand, and Michel Mariton. Analyse des performances d'un filtre de détection de ruptures markoviennes. In *Proceedings of IFAC Symposium AIPAC*, Nancy, France, july 1989.
- [YBSDP94] Murali Yeddanapudi, Yaakov Bar-Shalom, Somnath Deb, and Krishna Rao Pattipati. Ballistic missile track initiation from satellite observations. In *Proceedings of 1994 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets*, volume 2235, Orlando, FL, april 1994.
- [YBSP94] Murali Yeddanapudi, Yaakov Bar-Shalom, and Krishna Rao Pattipati. Matsurv : Multisensor air traffic surveillance system. Technical Report Tech. Rep. 95-12, University of Connecticut, Storrs, CR, april 1994.
- [YBSP95] Murali Yeddanapudi, Yaakov Bar-Shalom, and Krishna Rao Pattipati. Imm estimation for multitarget-multisensor air traffic surveillance. In *Proceedings of 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, december 1995.
- [YBSDP96] Murali Yeddanapudi, Yaakov Bar-Shalom, Krishna Rao Pattipati, and Somnath Deb. Ballistic missile track initiation from satellite observations with extrapolation to impact. *AGARDograph 337 : Multi-sensor Multi-Target Data Fusion, Tracking and Identification Techniques for Guidance and Control Applications*, pages 76–95, october 1996.
- [YWW76] S.J. Yakowitz, T.L. Williams, and G.D. Williams. Surveillance of several markov targets. *IEEE Trans. on IT*, 22 :716–724, november 1976.

- [ZB93] Bin Zhou and N.K. Bose. Multitarget tracking in clutter : Fast algorithms for data association. *IEEE Trans. on AES*, 29(2) :352–363, april 1993.
- [Zha92] Z. Zhang. Iterative point matching for registration of free-form curves. Technical Report Tech. Rep. RR 1658, INRIA, INRIA, France, 1992.
- [Zha93a] Z. Zhang. The matching problem : The state of art. Technical Report Tech. Rep. RR 2146, INRIA, INRIA, France, 1993.
- [Zha93b] Z. Zhang. Registration of free-form surfaces represented by point sets. *Traitemen du Signal*, 10(4), 1993.
- [Zho92] Bin Zhou. *Multitarget Tracking in Clutter : Algorithms for Data Association and State Estimation*. PhD dissertation, Dept. of Elec. and Comp. Eng., Pennsylvania State University, may 1992.
- [ZLY00] You Min Zhu, Xiao Rong Li, and Z. You. Unified fusion rule in multisensor network decision systems. In *Proceedings of third Int. Conf. on Inf. Fusion (Fusion 2000)*, Vol. 2, Paris, France, july 2000.
- [Zug92] O. Zugmeyer. *Méthodes d'analyse spatio-temporelle de sources en mouvement*. PhD dissertation, Université de Rennes 1, Rennes, France, 1992.
- [Zup73] J. Zupan. *Clustering of Large Data Sets*. Academic Press, 1973.