Une étude des complexités liées à la dérivation d'équations d'amplitude via des développements faiblement non linéaires d'équations aux dérivées partielles non auto-adjointes

A study of the complications regarding the derivation of amplitude equations via weakly nonlinear analysis for non-self-adjoint partial differential equations

Soutenance de thèse – Catherine DRYSDALE

Lundi 13 décembre 2021 à 14 H 00

En visioconférence Zoom
https://ecolepolytechnique.zoom.us/j/82555564208

Devant le jury composé de :

- **Président:**
  * Luc PASTUR (Professeur Associé) .... Institut Polytechnique of Paris, ENSTA, Palaiseau, France
- **Rapporteurs :**
  * David KREJCIRIK (Professeur Associé) .... Czech Technical University in Prague, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Prague, Czech Republic
  * Peter SCHMID (Professeur) .... KAUST, Physical Science and Engineering Division, Thuwal, Saudi Arabia
- **Examinateurs :**
  * Alessia KOGOJ (Professeure Associée) .... Universita degli Studi di Urbino Carlo Bo, Department of Pure Physical and Applied Sciences, Urbino, Italie
  * David NEEDHAM (Professeur Emérite) .... University of Birmingham, Department of Mathematics, United Kingdom
  * Grigoris PAVLIOTIS (Professeur) .... Imperial College London, Department of Mathematics, London, United Kingdom
- **Encadrant** :
  * Denis SIPP (Directeur Scientifique Adjoint) .... ONERA DAAA/MAAA, Meudon, France

---0---

Résumé / *Abstract*

L'interaction entre la non-normalité et la non-linéarité a fait l'objet de nombreux travaux mais aussi de controverses en mécanique des fluides. Dans cette thèse, nous explorons la relation entre la non-normalité et la non-linéarité en analysant les limitations des approximations au premier ordre des développements faiblement non linéeaires (WNLE) pour prédire l'amplitude des branches bifurquées de systèmes non auto-adjoints.

L'approximation du premier ordre correspond à un vecteur propre marginal multiplié par une amplitude régie par une équation, dite équation d'amplitude.

Dans la littérature, les auteurs ont utilisé diverses approches pour améliorer cette approximation, comme aller plus haut dans l'ordre dans l'approximation, ce qui nécessite des hypothèses supplémentaires en raison de la non-unicité des termes d'ordre supéerieur, ainsi que la construction d'équations d'amplitude d'ordre supérieur pour décrire le développement temporel du vecteur propre considéré. Cette dernière approche peut être considérée comme un moyen pour gérer la non-unicité. Cependant, en ne considérant dans l'approximation que le vecteur propre dominant, même si son développement temporel est régi par une équation d'amplitude d'ordre supérieur, on néglige les structures spatiales différentes de ce vecteur propre.

Dans cette thèse, nous choisissons deux cas tests pour explorer les phénomènes décrits ci-dessus, à savoir l'équation de Ginzburg-Landau non-auto-adjointe réelle (RnsaGL) et l'équation complexe de Ginzburg-Landau non-auto-adjointe (CnsaGL). Nous choisissons ces cas tests car les opérateurs linéaires génèrent dans chaque cas des semi-groupes fortement continus. Egalement dans le cas réel, il existe une structure de quasi-base. Cela nous permet de rechercher la solution de RnsaGL sous la forme de couples valeur propre-vecteur propre.

Dans un premier temps, nous consolidons les recherches effectuées par d'autres auteurs dans la littérature en dérivant des équations d'amplitude d'ordre supérieur pour le cas RnsaGL. Il est démontré que les équations d'amplitude d'ordre supérieur ont un rayon de convergence plus petit. Nous argumentons également contre les équations d'amplitude d'ordre supérieur en projetant la solution obtenue numériquement sur le vecteur propre dominant : nous constatons que, pour une non-normalité croissante, la solution est de moins en moins alignée avec le vecteur propre dominant. Ainsi, quelle que soit la complexité de l'équation d'amplitude, elle ne peut pas représenter la solution.

Nous dérivons ensuite des approximations d'ordre supérieur en utilisant une hypothèse différente des travaux des auteurs précédents ; à savoir qu'il ne peut y avoir de contributions linéaires dans l'approximation des termes d'ordre supérieur. On voit que dans le cas RnsaGL, cette hypothèse peut être prescrite en imposant que les termes d'ordre supérieur sont orthogonaux au vecteur propre direct ou au vecteur propre adjoint (dans le cas CnsaGL, on ne peut choisir que le vecteur propre direct). Après cela, nous dérivons des bornes d'erreur afin de quantifier la différence entre les solutions numériques et leurs approximations correspondantes.

La dérivation de ces bornes d'erreur est facilitée par le fait que les opérateurs linéaires dans les cas considérés génèrent des semi-groupes fortement continus. Ces bornes d'erreur sont des outils théoriques pour montrer l'existence d'un possible rayon de convergence (ils ne nous permettent pas de déterminer le rayon de convergence exact). Nous discutons comment ces bornes d'erreur théoriques peuvent être utilisées concrètement. Enfin, nous profitons de l'existence de la quasi-base en présentant une technique de moyennage stochastique où les modes stables sont soumis à du bruit. Cette technique de moyennage stochastique est différente de la technique WNLE car aucun mode propre n'est négligé dans l'approche, mais les caractéristiques de saturation sont encore sous-estimées dans le cas non autoadjoint.

/

The interplay between non-normality and nonlinearity has been the focus of numerous works but also contention in Fluid Mechanics. In this thesis, we explore the relationship between non-normality and nonlinearity by considering the failure of firstorder approximations derived via weakly nonlinear expansions (WNLE) to capture saturation characteristics of non-self-adjoint systems.

The first-order approximation achieved via WNLE is of the form of the leading eigenvector multiplied by an amplitude, which is governed by an amplitude equation.

Authors have used various approaches to improve upon this approximation, such as going higher in order in the approximation, which requires additional assumptions owing to the non-uniqueness of higher order terms, as well as also building higher order amplitude equations to describe the temporal development of the leading eigenvector. The latter approach can be seen as a way to circumvent the nonuniqueness.

However, by still only approximating with the leading eigenvector, even though its temporal development is elaborated by a higher order amplitude equation, spatial structures different from the leading

eigenvector are neglected.

In this thesis, we choose two test-cases to explore the phenomena described above, namely the real nonself-adjoint Ginzburg-Landau equation (RnsaGL) and the Complex non-self-adjoint Ginzburg-Landau (CnsaGL) equation. We choose these test cases because the linear operators in each case generate strongly continuous semigroups, but, also in the real case, there exists a quasi-basis structure. This allows us to expand the solution of the RnsaGL into eigenvalue-eigenvector pairs, which is not always possible for non-self-adjoint linear operators as the eigenvectors' forming an orthonormal basis is not guaranteed as it is in the self-adjoint case.

We begin the thesis by consolidating the research done by other authors in the literature review and in one of the core chapters where we derive higher order amplitude equations for the RnsaGL. It is demonstrated for the RnsaGL that higher order amplitude equations have a smaller radius of convergence, which essentially limits the usefulness of the approximation.

We also argue against higher order amplitude equations by projecting the solution of our test cases onto the zeroth eigenvector, where we find that, for increasing non-normality, less of the overall solution is projected onto the zeroth eigenvector. In this way, no matter how elaborate the amplitude equation, it is incapable of representing the entire system.

Following the consolidation of previous research, we derive higher order approximations using an assumption that is different to the work of previous authors; namely that there can be no linear contributions to the approximation at higher order terms. We see that in the case of the RnsaGL, this assumption can manifest by ensuring that the higher order terms are orthogonal to the direct eigenvector or the adjoint eigenvector (in the case of the CnsaGL, we can only choose the direct eigenvector). After this, we derive error bounds in order to quantify the difference between the solutions of the test cases and their corresponding approximations.

The derivation of these error bounds is facilitated by the fact that the linear operators in our test cases generate strongly continuous semigroups. These error bounds are theoretical tools to show the existence of a possible radius of convergence rather than telling us what the radius of convergence is. We therefore discuss how to turn these error bounds from theoretical tools to something that can be used for application.

Lastly, we profit from the existence of the quasi-basis by using a stochastic averaging technique where noise is put on the stable modes. This stochastic averaging technique is different from WNLE as no eigenmodes are neglected as a first step, but the saturation characteristics are still underestimated in the non-self-adjoint case.

---0---

Mots clés / *Key words*

EQUATIONS D'AMPLITUDE, EXPANSIONS FAIBLEMENT NON LINEAIRES, EQUATION DE GINZBURG-LANDAU, NON AUTO ADJOINT, EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

AMPLITUDE EQUATIONS, WEAKLY NONLINEAR EXPANSIONS, GINZBURG-LANDAU EQUATION, NON SELF ADJOINT, PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS